F 7414

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIŞOARA

SERIA

MATEMATICA — FIZICA — MECANICA TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tomul 19 (33) Fascicola 1

IANUARIE—IUNIE
1974

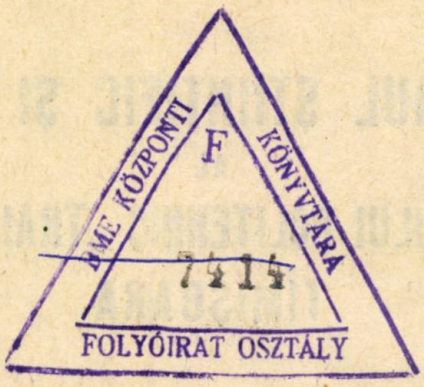
BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIŞOARA

SERIA
MATEMATICĂ–FIZICĂ–MECANICĂ
TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tomul 19 (33) Fascicola 1

IANUARIE — IUNIE
1974

1989

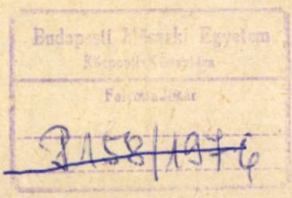


COLEGIUL DE REDACŢIE

Prof. em. dr. ing. *Gh. Silaş* (redactor şef), acad. prof. dr. doc. ing. *I. Anton*, prof. ing. *C. Avram*, m. c. al Academiei R.S.R., prof. dr. ing. *M. Borneas*, prof. dr. ing. *M. Braşovan*, prof. dr. ing. *V. Cocheci*, academician prof. dr. doc. *C. Drăgulescu*, prof. dr. *O. Em. Gheorghiu*, prof. ing. *V. Gheorghiu*, prof. dr. ing. *Gh. Savii*, acad. prof. ing. *D. Mateescu*, prof. dr. ing. *I. Novac*.

COMITETUL DE REDACŢIE

Prof. dr. *O. Em. Gheorghiu* (redactor resp.) prof. dr. ing. *M. Borneas* (redactor responsabil adjunct) prof. emerit dr. ing. *Gh. Silaş*, prof. dr. *B. Crstici*, prof. dr. *C. Simoiu*, conf. dr. ing. *I. Groşanu* şi conf. dr. ing. *L. Brîndeu* (secretar de redacţie)



BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC AL INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" DIN TIMIŞOARA

SERIA MATEMATICĂ — FIZICĂ — MECANICĂ TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tom. 19(33) Fasc. 1 Ianuarie—iunie 1974

SUMAR

H. SASAYAMA, Asupra generalizării abstracte a spaţiilor-jet pentru varietăţi cu coordonate topologice liniare I. Jeturi infinitezimale abstracte 7

A. C. SRIVASTAVA, R. C. BHATTACHARJEE, Efectul curburii asupra convecţiei libere oscilatorii 15

T. BÂNZARU, Aplicaţii multivoce aproape perioadice 25

GH. TUDOR, Complemente la tratatul lui Mitrinovici (V). Cîteva inegalităţi integrale remarcabile 29

J. TĂUBER, O clasă specială de loopuri slabe (I) 33

M. BORNEAS, M. DAVID, I. MIRON, M. CRISTEA, I. DAMIAN, Asupra tranziţiilor cuantice ale unor sisteme speciale multiplu perturbate 39

COLETA DE SABATA, C. MARCU, Aspecte de histereză ale cîmpului critic la pături de Ni—Co torsionate alternant 43

COLETA DE SABATA, C. MARCU, DOROTHEA MIHAILOVICI, Colaborarea tratamentelor magnetice şi termice la modificarea proprietăţilor magnetice ale păturilor de Ni—Co 53

AURICA MUNTEANU, C. MARCU, RADA BAEA, DOROTHEA MIHAILOVICI, Cercetări experimentale asupra obţinerii unor ajiaje de nichel cu metale fero- şi paramagnetice 59

GH. SILAŞ, L. BRÎNDEU M. TOADER, Studiul mişcărilor periodice cu ciocniri ale unui sistem cu două mase legate elastic 67

L. BRÎNDEU, Metodă directă folosită pentru determinarea condiţiilor de stabilitate ale mişcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant 73

I. GROŞANU, Regimurile staţionare ale unor agregate acţionate de motoare electrice asincrone 81

DOINA BECHERESCU, Determinarea mişcărilor periodice cu ciocniri plastice ($R=0$) şi contact neinstantaneu ale unei particule pe o platformă vibratoare 87

A. HEGEDÜS, Asupra mişcărilor vibropercutante periodice produse de excitaţia armonică şi dreptunghiulară 95

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ БЮЛЕТЕНЬ
ТИМИШОРСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМ. «ТРАЯН ВУЯ»
МАТЕМАТИКА-ФИЗИКА-ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Том 19(33) Выпуск I. Январь—июнь 1974

СОДЕРЖАНИЕ

Х. САСАЯМА, В связи с абстрактным обобщением пространств - струи для разновидностей с топологическими линейными координатами 7

А. К. СРИВАСТАВА, Р.С. БХАТТАКАРЖЕЕ, Эффект кривизны при свободной колебательной конвекции 15

Т. БЫНЗАРУ, Многомерные почти периодические отображения. 25

Г. ТУДОР, Дополнение к трактату Митроновича (V). Некоторые замечательные интегральные неравенства. 29

Ж. ТАУБЕР, Специальный класс слабых лупов (I) 33

М. БОРНЕАС, М. ДАВИД, И. МИРОН, М. КРИСТЕА, И. ДАМИЯН, В связи с квантовымм переходами некоторых специальных многочисленно пертубированных. 39

КОЛЕТТ ДЕ САБАТА, К. МАРКУ, Виды гистеризиса критического поля у переменно скрученных слоев. 43

КОЛЕТТ ДЕ САБАТА, К. МАРКУ, ДОРОТХЕЯ МИХАЙЛОВИЧ, Сотрудничество магнитных и тепловых обработок при изменении магнитных свойств слоев. 53

АУРИКА МУНТЯНУ, К. МАРКУ, РАДА БАЙЯ, ДОРОТ ХЕЯ МИХАЙЛОВИЧ, Опытные исследования в виду получения некоторых сплавов никеля с ферро и парамагнитными металлами. 59

Г. СИЛАШ, Л. БРЫНДЕУ, М. ТОАДЕР, Исследование периодических движений с соударениями системы с двумя упруго связанными массами. 67

Л. БРЫНДЕУ, Непосредственный метод применённый в виду определения условий устойчивости периодоических движений виброударной системы. 73

И. ГРОШАНУ. Устойчивые режимы некоторых агрегатов приводимых асинхроными електрическими двигателями. 81

ДОЙНА БЕКЕРЕСКУ, Определение периодических движений с пластическими соударениями (R=0) и немгновенным контактом некоторой частицы на вибрирующей площадке. 87

А. ХЕГЕДУШ, В связи с виброударными периодическими движениями произведенными гармоническими и прямоугольным возбуждением. 95

BULLETIN SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE DE L'INSTITUT POLYTECHNIQUE „TRAIAN VUIA" DE TIMIŞOARA

SÉRIE MATHÉMATIQUE — PHISIQUE — MECANIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉ

Tome 19(33) Fasc. 1 Janvier—Juin 1974

SOMMAIRE

H. SASAYAMA, On the Abstract Generalization of Jet-Spaces for Manifold with Linear Topological Coordinates. I. Abstract Infinitesimal Jets 7

A. C. SRIVASTAVA, R. C. BHATTACHARJEE, The Effect of Curvature on Oscilatory Free Convection 15

T. BÎNZARU, Fastperiodische mehrdeutige Abbildungen 25

GH. TUDOR, Compléments au traité de Mitrinović (V). Quelques inégalités remarquables 29

J. TÄUBER, Eine spezielle Klasse von schwachen Loops (I) 33

M. BORNEAS, M. DAVID, I. MIRON, M. CRISTEA, I. DAMIAN, On the Quantum Transitions of Some Special Systems Perturbed by Multiple Perturbations 39

COLETTE DE SABATA, C. MARCU, Des aspets d'hysterèse du champ critique dans les couches de Ni—Co en torsion alternante 43

COLETTE DE SABATA C. MARCU, DOROTHEA MIHAILOVICI, Die Veränderungen der magnetischen Eigenschaften der Ni—Co-Schichten durch die Zusammenarbeit zwischen den magnetischen und thermischen Behandlungen 53

AURICA MUNTEANU, C. MARCU, RADA BAEA, DOROTHEA MIHAILOVICI, Experimentelle Untersuchungen über die Herstellung einiger Nickel-Legierungen mit ferro- und paramagnetische Metalle 59

GH. SILAŞ, L. BRÎNDEU, M. TOADER, Das Studium der periodischen Bewegungen mit Stőssen eines Systems mit zmei elastisch verbundenen Massen 67

L. BRÎNDEU, Méthode directe employée pour déterminer les conditions de stabilité des mouvements pédiodiques du système vibropercu tant 73

I. GROŞANU, The Steady-State Regimes of Some Agregates wich are Driven by Electric Asyncronous Motors 81

DOINA BECHERESCU, Die Bestimmung periodischer Schwingungen bei plastischen Stössen ($R=0$) und andauernder Berührung eines Stössels auf einem Schwingkörper 87

A. HEGEDÜS, Über die periodischen Stossschwingungen welche durch harmanische und rechteckfőrmige Erregung erzeugt werden 95

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

ON THE ABSTRACT GENERALIZATION OF JET-SPACES FOR MANIFOLDS WITH LINEAR TOPOLOGICAL COORDINATES. I. ABSTRACT INFINITESIMAL JETS

BY

HIROYOSHI SASAYAMA
The Sasayama Institute, Japan

The principal purpose of the present paper is to generalize C. Ehresmann's theory of jets [5] to abstract differentiable manifolds with linear topological coordinates. It is a matter of course that the notions of C. Ehresmann's jets can be regarded as generalized notions of extended points of higher order manifold in a certain sense. And, H. V. Craig's derived extensors introduced in [3] and Y. Katsurada's extended connection parameters introduced in [4] can be regarded as certain kinds of prolongations of tensor fields and of connection in the base point manifold into the manifold of jets respectively. Previously, the present author has given a global definition of general higher order manifold of line-elements for finite dimension [8].

Some special cases of the generalization in our present aim have been already given by the present author in the previous papers. That is, C. Ehresmann's l^m-vitesse and p^m-vitesse (being special jets) have been already generalized abstractly for linear topological coordinates as abstract line-elements of order m and multiple parameter abstract extended points of non-separate order m respectively, by the present author. (Reported at the Meetings of the Math. Soc. of Japan in May, 1963 α in Oct., 1967 and published in [15], [19]. The multiple parameter abstract extended points of separate order in [19] is no other than the separate order generalization of the abstract generalization of C. Ehresmann's p^m-vitesse. These generalizations correspond to the case that the manifold of „sources" are linear spaces of finite dimension and the manifolds of „targets" are abstract differentiable manifolds with linear topological coordinates.

After that, corresponding to the case that the manifold of source is a Banach space and the manifold of targets is an abstract differentiable manifold with linear topological coordinates, the present author has reported the results on the abstract parameter generalization of surface elements together with their abstract extensor theory in May, 1968 at the Annual Meeting of the Math. Soc. of Japan and published these results in the recent paper [24].

This is no other than the most general type of abstract vitesse. On the other hand, the present author has given the formula for the m-th order Fréchet-differential of a composite functional $\mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{U}))$ as an abstract generalization of A. Fais' formula in classical analysis, as reported in May, 1967 at the Annual Meeting of the Math. Soc. of Japan, where $\mathbf{F}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{U}$ all beleong to Banach spaces (cf. [17]). With the help of this formula, the local representation of multiplication among our abstract jets hence also the coordinate representation of the multiplication in the group of infinitesimal isotropy can be generalized for abstract linear topological coordinates. Next, as seen in the following, the local coordinates of our generalized infinitesimal jet of order m are given by a homogeneous functional of degree m of an abstract vectorial variable ξ which is defined by the m-th order Fréchet-differential $d^m\mathbf{F}(x; \xi; \ldots; \xi)$ with the equal increment ξ, simi larly as seen already in the case of abstract vitesse [24].

For simplicity, in the following, we shall adopt Banach spaces as linear topological spaces and adopt Fréchet-differential as linear topological differential, though these can be replaced

by more general ones by supplying additional suitable conditions. We shall define abstractly generalized infinitesimal jets for abstract differentiable manifolds with Banach spaces of local coordinates together with some incidental definitions.

Let **B** be a Banach space. A homeomorphism of an open subset of **B** onto an open subset of **B** is called a *local automorphism of order m in* **B** or a *local diffeomorphism of class* C^m *in* **B** if it and its inverse are of class C^m in the sense of Fréchet-differential i.e. these mappings have continuous successive Fréchet-differentials up to the order m.

The pseudo-group constructed by all local automorphisms of order m in **B** will be denoted by the symbol Λ_B^m and let $\mathfrak{K}$ be the totality of the domains and the image sets of all transformations of Λ_B^m. (When $f \in \Lambda_B^m$ is a mapping of an open subset U onto $f(U)$, we call $U, f(U)$ the *domain*, the *image set* of f respectively.)

A topological space $\mathfrak{W}$ having a collection $\{\chi_\alpha\}$ of mappings such that the following conditions are satisfied is called an *abstract differentiable manifold of class* C^m *with the coordinate Banach space* **B**: (cf. [2], [9], [10], [14], [18])

Condition I. Each χ_α is a homeomorphism of an open subset $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathfrak{W}$ onto $\chi_\alpha(\mathfrak{A}_\alpha) \equiv U_\alpha \in \mathfrak{K}$ and called a *coordinate mapping* corresponing to the *coordinate neighborhood* $\mathfrak{A}_\alpha$. The inverse mapping χ_α^{-1} is called a *local chart* of **B** onto $\mathfrak{W}$.

Condition II. $\mathfrak{W}$ is covered by its coordinate neighborhood $\mathfrak{A}_\alpha$, that is, if $P \in \mathfrak{W}$, then $\exists\, \mathfrak{A}_\alpha \ni P$. Such a family $\mathfrak{A} \equiv \{\chi_\alpha^{-1}\}$ of local charts of **B** onto $\mathfrak{W}$ is called an *atlas of* **B** *onto* $\mathfrak{W}$.

Condition III. For all pairs $(\chi_\alpha, \chi_\beta)$ of two coordinate mappings such that $\mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{A}_\beta \equiv \mathfrak{A}$ is not empty, the restriction of $\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}$ to $\chi_\alpha(\mathfrak{A})$ is a mapping of this set into **B** and belongs to $\Lambda_{\mathbf{B}}^m$. The mapping $\psi_{\alpha\beta} \equiv \chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}$ is called the *coordinate transformation on* $\mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{A}_\beta$. That is, for all pairs (α, β), the change of local charts associated with $(\chi_\alpha^{-1}, \chi_\beta^{-1})$ belongs to $\Lambda_{\mathbf{B}}^m$ i. e. $\mathfrak{A}$ is *compatible* with Λ_B^m, where, for a pair (α, β), the corresponding mapping $\psi_{\alpha\beta}$ such that $\chi_\alpha^{-1}(\mathbf{X}) = \chi_\beta^{-1}(\mathbf{Y})$ is equivalent to $\mathbf{Y} = \psi_{\alpha\beta}(\mathbf{X})$ is called the *change of local charts associated with a pair of two local charts* $(\chi_\alpha^{-1}, \chi_\beta^{-1})$. In this case, a coordinate mapping is also called a *system of admissible local coordinates.*

Furthermore, if every atlas of **B** onto $\mathfrak{W}$ which is compatible with $\Lambda_{\mathbf{B}}^m$ and contains $\mathfrak{A}$ coincides with $\mathfrak{A}$, then $\mathfrak{A}$ is called a *complete* atlas compatible with $\Lambda_{\mathbf{B}}^m$. We can see that every atlas $\mathfrak{A}$ compatible with $\Lambda_{\mathbf{B}}^m$ is contained in the unique complete atlas $\overline{\mathfrak{A}}$ compatible with $\Lambda_{\mathbf{B}}^m$, that is, it is possible to enlarge $\mathfrak{A}$ in one and only one way so as to make it complete. We say that an complete atlas $\mathfrak{A}$ of **B** onto $\mathfrak{W}$ compatible with $\Lambda_{\mathbf{B}}^m$ defines on $\mathfrak{W}$ a *structure associated to* $\Lambda_{\mathbf{B}}^m$.

Now, let $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}'$ be two abstract difefrentiable manifolds of class C^m with Banach spaces **B**, **B**′ as the respective coordinate spaces. A mapping f of a neighborhood of a point $P_0 \in \mathfrak{W}$ into $\mathfrak{W}$' is called a *mapping of class* C^m *at a point* P_0 if it is expressed locally by a functional **F** which has continuous successive Fréchet-differentials up to the order m in terms of admissible local coordinates in neighborhoods of P_0 and of $f(P_0)$. That is, when χ, χ' are systems of admissible local coordinates at P_0, $f(P_0)$ with the coordinate neighborhood $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{W}, \mathfrak{W}'$ such that $\mathbf{X}_0 = \chi(P_0) \in \mathbf{B}$, $\mathbf{X}_0' = \chi'(f(P_0)) \in \mathbf{B}'$, and when $\overline{\chi}^{-1}$ is the restriction of χ^{-1} to a neighborhood $\overline{U}$ of $\mathbf{X}_0$ such that $\Phi \equiv \chi' f \overline{\chi}^{-1}$ is defined, f is of class C^m at P_0 if and only if the mapping Φ of $\overline{U}$ into **B**′ expressed as $\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ has continuous successive Fréchet-differentials up to the order m in a neighborhood of $\mathbf{X}_0$.

When $\mathbf{B} = R^n$ i. e. $\mathfrak{W}$ is n-dimensional, f is expressed locally as $\mathbf{X}' = \mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n)$ and f is of class C^m at P_0 if and only if $\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n)$ is of class C^m at $\mathbf{X}_0 = (\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$.

The totality of mappings of class C^m at a point $P_0 \in \mathfrak{W}$ such that the image sets are subsets in $\mathfrak{W}'$ will be denoted by $C^m_{P_0}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W}')$ and

$$C^m(\mathfrak{W}, \mathfrak{W}') \equiv \bigcup_{P \in \mathfrak{W}} C^m_P(\mathfrak{W}, \mathfrak{W}')$$

is called the *space of mappings of class C^m of $\mathfrak{W}$ into $\mathfrak{W}'$*.

For two mappings $f_1, f_2 \in C^m_{P_0}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W}')$, we shall define an equivalence relation as follows:

We say that f_1, f_2 *belong to the same m-class or that* f_1, f_2 are *equivalent to each other in the m-th order* if $f_1(P_0) = f_2(P_0)$ and, for each pair (χ, χ') of admissible local coordinate systems at $P_0, f_1(P_0)$ in $\mathfrak{W}, \mathfrak{W}'$, all the successive Fréchet-differentials of the same order of the mappings

$$\Phi_1 : \mathbf{X}' = \mathbf{F}_1(\mathbf{X}), \quad \Phi_2 : \mathbf{X}' = \mathbf{F}_2(\mathbf{X})$$

corresponding to given mappings f_1, f_2 have the same values at $\mathbf{X}_0$ up to the order m, for equal arbitrary increment ξ of a suitable neighborhood of $0 \in \mathbf{B}$ i.e.

$$d^r \mathbf{F}_1(\mathbf{X}_0; \xi; \ldots; \xi) = d^r \mathbf{F}_2(\mathbf{X}_0; \xi; \ldots; \xi)$$
$$(r = 0, 1. \ldots. m) \tag{1.1}$$

where $\mathbf{X}_0 \equiv \chi(P_0)$ be the local coordinates of P_0.

When $\mathbf{B} = R^n$, this equivalence relation reduces to the equality of the values at $(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ of the successive r-th order partial derivatives of the same kinds of the functionals $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ of their local expressions for each $r = 0, 1, \ldots, m$ i.e.

$$\left[\frac{\partial^r \mathbf{F}_1(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{(r)^1}, \ldots, \partial x_n^{(r)^n}}\right]_{x_i = \overset{\circ}{x}_i (i=1, \ldots, n)} = \left[\frac{\partial^r \mathbf{F}_2(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{(r)^1}, \ldots, \partial x_n^{(r)^n}}\right]_{x_i = \overset{\circ}{x}_i (i=1, \ldots, n)}$$
$$(a_{(r)^1} + \ldots + a_{(r)^n} = r; \quad r = 0, 1, \ldots, m).$$

This definition is also independent of the chosen local coordinate systems, because the successive Fréchet-differentials $d^r \mathbf{F}(\mathbf{X}_0; \xi; \ldots; \xi)$ $(r = 0, \ldots, m)$ of the functional $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ of the local expression $\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ of the mapping $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{W}'$ at $\mathbf{X}_0$ for arbitrary equal increment ξ of a neighborhood of $0 \in \mathbf{B}$ are transformed, under changes of local coordinate systems at $P_0 \in \mathfrak{W}$ and at $f(P_0) \in \mathfrak{W}'$, as follows.

At first, under a change of local chart at P_0 in $\mathfrak{W}$: $\overline{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$, $d^r \mathbf{F}(\mathbf{X}_0; \xi \ldots; \xi)$ $(r = 0, \ldots, m)$ are transformed as follows:

$$d^r_{\overline{\mathbf{X}}} \mathbf{F}(\mathbf{X}(\overline{\mathbf{X}}_0); \xi; \ldots; \xi) \equiv [d^r_{\overline{\mathbf{X}}}(; \xi; \ldots; \xi)\ \mathbf{F}(\mathbf{X}(\underline{\mathbf{X}}))]_{\overline{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{X}}_0 \equiv \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_0)} =$$

$$= \sum_{p=1}^{r} \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqq r_1, \ldots, r_p \leqq r;\ r_1 + \ldots + r_p = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_p!} d^p_{\mathbf{X}} \mathbf{F}(\mathbf{X}_0; d^{r_1}_{\overline{\mathbf{X}}} \mathbf{X}_0; \ldots; d^{r_p}_{\overline{\mathbf{X}}} \mathbf{X}_0) \equiv$$

$$\equiv [d^r_{\overline{\mathbf{X}}}\ \mathbf{F}(\mathbf{X}(\underline{\overline{\mathbf{X}}}))]\ \mathbf{X}_0, d_{\overline{\mathbf{X}}} \mathbf{X}_0, \ldots, d^r_{\overline{\mathbf{X}}} \mathbf{X}_0) \qquad (r = 0, \ldots, m) \tag{1.2}$$

where $d^r_{\overline{\mathbf{X}}} \mathbf{X}_0 \equiv d^r_{\overline{\mathbf{X}}} \mathbf{X}(\overline{\mathbf{X}}_0; \xi \ldots; \xi)$ $(r = 1, \ldots, m)$ be the values of the r-th order Fréchet-differentials of the functional $\mathbf{X}(\overline{\mathbf{X}})$ in $\overline{\mathbf{X}}$ at $\overline{\mathbf{X}}_0 \equiv \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_0)$ and $d^r_{\overline{\mathbf{X}}}(; \xi; \ldots; \xi)$ denote the r-th order Fréchet-differentiation in the variable $\overline{\mathbf{X}}$ for equal increment ξ (cf. Formula (3.7) in [24]).

Next, under a change of local chart at $f(P_0)$ in $\mathfrak{W}'$: $\overline{\mathbf{X}}'=\overline{\mathbf{X}}'(\mathbf{X}')$, $d^r\,\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi;\ldots;\xi)$ are transformed as follows:

$$[d^r_{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}'(\mathbf{F}(\mathbf{X});\xi;\ldots;\xi)]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0}\equiv[d^r_{\mathbf{X}}(;\xi;\ldots;\xi)\,\overline{\mathbf{X}}'\,(\mathbf{F}(\mathbf{X}))]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0}=$$

$$=[d^r_{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}'(\mathbf{F}(\mathbf{X}))]\;(\mathbf{F},d_{\mathbf{X}}\mathbf{F},\ldots,d^r_{\mathbf{X}}\mathbf{F})_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0}=\sum_{p=1}^{r}\frac{1}{p!}\sum_{1\leqq r_1,\ldots,r_p\leqq r:\,r_1+\cdots+r_p=r}$$

$$\frac{r!}{r_1!\ldots r_p!}\,d^p_{\mathbf{X}'}\overline{\mathbf{X}}'(\mathbf{F}(\mathbf{X}_0);d^{r_1}_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi\ldots;\xi);\ldots;d^{r_p}_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi;\ldots;\xi))\quad(r=0,\ldots,m)\quad(1.3)$$

(cf. Formula (3.6) in [24]).

We can also get the equations for the composite transformation of these coordinate transformation $\overline{\mathbf{X}}=\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$, $\overline{\mathbf{X}}'=\overline{\mathbf{X}}'(\mathbf{X}')$. Furthermore, this equivalence relation is also invariant under any diffeomorphism of $\mathfrak{A}$ onto itself in $\mathfrak{W}$.

A m-class of $C^m_{P_0}(\mathfrak{W},\mathfrak{W}')$ is defined as an *abstractly generalized infinitesimal jet of order m of* $\mathfrak{W}$ *into* $\mathfrak{W}'$ with the *source* P_0 and the *target* $f(P_0)$ where f be a representative mapping of the m-class.

We shall denote the abstractly generalized infinitesimal jet of order m determined by a mapping $f\in C^m_{P_0}(\mathfrak{W},\mathfrak{W}')$ by the symbol $j^m_{P_0}f$, following to C. Ehresmann.

The mapping $P\to j^m_P f$ is defined in an open subset of $\mathfrak{W}$, which is denoted by $j^m f$ and called the *m-flot* of f.

When $\mathfrak{W}=\mathbf{B}$, $\mathfrak{W}'=\mathbf{B}'$, a m-jet is called a *holonomic infinitesimal jet of order m of* $\mathbf{B}$ *into* $\mathbf{B}'$, where the local charts in $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ as manifolds be the identity mappings. Then, the abstractly generalized infinitesimal m-jet of a manifold $\mathfrak{W}$ into a manifold $\mathfrak{W}'$ can be also defined as an equivalence class obtained by the following epuivalence relation among elements of $C^m_{P_0}(\mathfrak{W},\mathfrak{W}')$: $f_1, f_2\in C^m_{P_0}(\mathfrak{W},\mathfrak{W}')$ belong to the same m-class if

$$j^m_{\mathbf{X}_0}(\chi' f_1\chi^{-1})=j^m_{\mathbf{X}_0}(\chi' f_2\chi^{-1}).\quad(1.4)$$

Let $J^m_{P_0}(\mathfrak{W},\mathfrak{W}')$ be the totality of abstractly generalized infinitesimal jets of order m of $\mathfrak{W}$ into $\mathfrak{W}'$ with the source P_0. Then, the join

$$J^m(\mathfrak{W},\mathfrak{W}')\equiv\bigcup_{P\in\mathfrak{W}}J^m_P(\mathfrak{W},\mathfrak{W}')\quad(1.5)$$

has a structure of an abstract differentiable manifold (induced from the structures of $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}'$ in natural way).

When a mapping f of an neighborhood $\mathfrak{A}$ of $P_0\in\mathfrak{W}$ into $\mathfrak{W}'$ is expressed locally by the equation $\mathbf{X}'=\mathbf{F}(\mathbf{X})$ in the local coordoinates $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$ at P_0, $f(P_0)$ respectively, the set of Fréchet-differentials as functionals in ξ: $\{d^r\,\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi;\ldots;\xi):r=0,\ldots,m\}$ gives the local coordinates of $j^m_{P_0}f$.

When $\mathbf{B}=R^n$, the set of values at $\mathbf{X}_0=(\overset{\circ}{x}_1,\ldots,\overset{\circ}{x}_n)$ of the successive partial derivatives

$$\left\{\frac{\partial^r\mathbf{F}}{\partial x_1^{\overset{a}{(r)}1}\ldots\partial x_n^{\overset{a}{(r)}n}}:\ \overset{a}{(r)}_1+\cdots+\overset{a}{(r)}_n=r,\ r=0,\ldots,m\right\}$$

gives the local coordinates of $j^m_{P_0}f$.

We can consider projections

$$\alpha(j^m_{P_0} f) \equiv P_0, \quad \beta(j^m_{P_0} f) \equiv f(P_0) \tag{1.6}$$

of $J^m(\mathfrak{W}, \mathfrak{W}')$ into $\mathfrak{W}$ and into $\mathfrak{W}'$ respectively.

When $0 \leqq l \leqq m$, we get the natural projection

$$\mu^l_m : J^m(\mathfrak{W}, \mathfrak{W}') \to J^l(\mathfrak{W}, \mathfrak{W}')$$

by

$$\mu^l_m(j^m_P f) = j^l_P f. \tag{1.7}$$

In particular, for $l=0$, the l-jet can be identified with $(P_0, f(P_0))$ by identifying $J^0(\mathfrak{W}, \mathfrak{W}')$ with $\mathfrak{W} \times \mathfrak{W}'$.

Evidently, the relation

$$\mu^{m_1}_{m_3} = \mu^{m_1}_{m_2} \mu^{m_2}_{m_3} \qquad (m_1 \leqq m_2 \leqq m_3) \tag{1.8}$$

holds.

REFERENCES

1. M. Fréchet, La notion de différentielle dans l'analyse générale. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (Paris), Tome 42 (1925), pp. 293–323.
2. A. D. Michal, General differential geometries and related topics. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 45 (1939), pp. 529–563.
3. H. V. Craig, On the structure of intrinsic derivatives. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 53 (1947), pp. 332–343.
4. Y. Katsurada, On the extended connection parameters in a space with affine connection and in a Riemannian space. Journal of the Faculty of Sciences, Hokkaidō University, Ser. I. Math., Vol. 12 (1951), pp. 17–28.
5. C. Ehresmann, Les prolongements d'une varieté differentiable I, II, III, IV, V. Comptes Rendus des Séances de l'Academie des Sciences, Paris, Tome 233 (1951) pp. 598–600, 777–779, 1081–1083; Tome 234 (1952), pp. 1028–1030. 1424–1425.
6. C. Ehresmann, Les prolongements d'une variété differentiable. Atti del IV Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Vol. II in Taormina 25–31 Ottobre 1951 (Edizioni Cremonese, Roma, 1953), pp. 317–325.
7. H. V. Craig, *On the multiple parameter Jacobian extensor.* Tensor, New Ser., Vol. 2 (1952), pp. 27–35.
8. H. Sasayama, *On the exterior differential forms on higher order manifolds.* Tensor. New Ser., Vol. 2 (1952), pp. 36–46.
9. H. Sasayama, On the generalization of a E. Cartan's theorem concerning invariant differential forms and its analogue to manifolds with general connection. Horonomii-Gun-Kenkyn, No. 23 (1952), Dec., pp. 16–25. (Written in Jap.)
10. H. Sasayama, On the generalized invariant differential form on manifolds with general connection. Tohoku Mathematical Journal, New Ser., Vol. 5 (1953), pp. 122–127.
11. C. Ehresmann, Introduction à la théorie des structure infinitésimales et des pseudogroupes de Lie. Colloque Internationaux du C. N. R. S. LII Geometrie Différentielle, Strasbourg (1953), pp. 97–110.
12. A. D. Michal, *Le Calcul Differentiel dans les Espaces de Banach.* Tome I, II. Paris, Gauthier-Villars (1958, 1964).
13. H. V. Craig, Teoria ed applicazioni dell'Analisi Estensoriale. La Scuola in Azione, numeri 13 (1964), pp. 60–95 (prima parte); numeri 21 (1964), pp. 77–132 (seconda od ultima parte).
14. H. Sasayama, On the space of abstract quasieuclidean connection. Journal of Spatial Mathematisc of the Sasayama Research Room, Vol. 7 (1964. pp. 101–140.

15. H. Sasayama, On the abstract spaces of arbitrary order. Journal of Spatial Mathematics of the Sasayama Research Room, Vol. 8 (1965), pp. 73—190; *Errata.* loc. cit., Vol. 12 (1969), pp. 91—108; *Supplementary Errata.* Loc. cit., Vol. 13 (1970), pp. 73—78.

16. H. Sasayama, On the generalized order intrinsic derivation $f(\delta/\delta t)$ in the space of linear topological coordinates. Journal of Spatial Math. of the Sasayama Research Room, Vol. 9 (1966), pp. 199—384.

17. H. Sasayama, On generalizations to multiple and abstract variables of R. Hoppe's, Faà di Bruno's and A. Fais' formulae for explicit forms of higher order derivatives of composite functions. Journal of Spatial Math. of the Sasayama Research Room, Vol. 11 (1968), pp. 247—284; *Errata*: loc. cit., Vol. 14 (1971), pp. 51—58.

18. H. Sasayama, On the abstract non-holonomic quasi-euclidean spaces of line-elements. Jour. Spatial Math. Sasayama Res. Room, Vol. 12 (1969), pp. 1—90.

19. H. Sasayama, On the abstract spaces of extended points of higher positive integral order for multiple parameters I. Generalizations of formulae for higher order derivatives of productfunctions and H.V. Craig's formula to abstract vector-valued composite functionals $F(t_1, \ldots, t_k)$; $V_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, V_p(t_1, \ldots, t_k))$, $F(x(t_1, \ldots, t_k))$. Jori. Spat. Math. Sasayama Res. Room, Vol. 12 (1969), pp. 109—248.

20. H. Sayasama, On the abstract spaces of extended points of higher positive integral order for multiple îarameters II. Abstract extangent bundle and extended abstract frame bundle of k-ple order. Journal of Spatial Math. of the Sasayama Res. Room, Vol. 13 (1970), pp. 1—72.

21. H. Sasayama. On the abstract spaces of extended points of higher positive integral order for multiple parameters III. Abstract extensors of positive integral k-ple ranges. Jour. Spat. Math. Sasayama Res. Room, Vol. 13 (1970), pp. 79—280.

22. H. Sasayama, On the abstract generalization to Fréchet-differentials of D. Pandres, formula for $d^m f x_1(u), \ldots, x_n(u))/du^m$. Journal of Spatial Math. of the Sasayama Research Room, Vol. 14 (1971), pp. 59—78.

23. H. Sasayama, On generalizations of R. Hoppe's and Vaà di Bruno's formulae for m-th order derivatives of the composite function $F(u_1, \ldots, u_k, x_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_k))$ and generalized A. Fais' formula for the m-th order Fréchet-differential of the composite functional $F(\mathbf{X}_1(\mathbf{U}), \ldots, \mathbf{X}_p(\mathbf{U}))$. Jour. Spat. Math. Sasayama Res. Room, Vol. 14 (1971), pp. 79—108.

24. H. Sasayama, On the of abstract parameter surface-elements of integral higher order. Journal of Spatial Mathematics of the Sasayama Research Room, Vol. 14 (1971), pp. 109—182.

ASUPRA GENERALIZĂRII ABSTRACTE A SPAȚIILOR-JET PENTRU VARIETĂȚI CU COORDONATE TOPOLOGICE LINIARE

I. JETURI INFINITEZIMALE ABSTRACTE

(REZUMAT)

Scopul principal al prezentului articol este generalizarea teoriei jeturilor a lui C. Ehresmann [5] la varietăți diferențiabile abstracte cu coordonate topologice liniare.

Mai întîi, autorul dă o definiție globală a varietăților de ordin superior cu elemente -linii de dimensiuni finite [8].

Apoi, corespunzător cazului că varietatea sursă este un spațiu Banach și că varietatea țintă este o varietate diferențiabilă abstractă cu coordonate topologice liniare, autorul leagă rezultatele asupra generalizării parametrului abstract la elemente-suprafață cu teoria extensorilor lor abstracți.

В СВЯЗИ С АБСТРАКТНЫМ ОБОБЩЕНИЕМ ПРОСТРАН-СТВ СТРУИ ДЛЯ РАЗНОВИДНОСТЕЙ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ЛИНЕЙНЫМИ КООРДИНАТАМИ

(РЕЗЮМЕ)

Основной целью настоящей статьи является обобщение теории струи К. Ehresmana [5] к дифференциируемым абстрактным разновидностям с линейными топологическими координатами.

В первую очередь автор дает общее определение разновидностей высшего порядка с элементами-линии конечных размеров [8],

Затем, соответственно случаю в котором разновидность источник является пространством Банаха, а разновидность цель является диференциируемой абстрактной разновидностью с линейными топологическими координатами, автор делает связь между результатами обобщения абстрактного параметра на элеметах-площадь с теорией их абстрактных экстензоров.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

THE EFFECT OF CURVATURE ON OSCILLATORY FREE CONVECTION

BY

A. C. SRIVASTAVA and R. C. BHATTACHARJEE
Department of Mathematics
Dibrugarh University
Dibrugarh, Assam

1. INTRODUCTION

Schlichting (1932) was the first to show that small oscillations of a circular cylinder in a fluid at rest induce characteristic secondary flows whose nature is such that a steady motion is imparted to the whole fluid in spite of the fact that the motion of the fluid is purely periodic. He used Blasius boundary layer equations for plane motion thus neglecting the effect of curvature. Wangs (1966) derived the boundary layer equations in another manner and showed that the interaction of the curvature with the viscosity of the fluid is important in second approximation if the equations are solved by expanding the entities involved in powers of a parameter. He calculated the corrections to the solution obtained by Schlichting. Merkin (1967) showed that the boundary layer on the horizontal cylinder caused by free convection, when the temperature of the cylinder is oscillating harmonically, can be considered in a way which is analogous to the problem of cylinder performing oscillations along its diameter. Following Schlichting (1932), he discussed the problem when the temperature of the fixed cylinder, having its axis horizontal, oscillates harmonically with frequency ω about a mean temperature T_0, the temperature of the surrounding fluid. Thus the effect of curvature is neglected in his work.

In this paper we have discussed the effect of curvature on oscillatory free convection in viscous incompressible fluid by considering the boundary layers on a fixed horizontal circular cylinder and a sphere whose temperature T_ω is oscillating harmonically with frequency ω about a mean temperature T_0 which is the temperature at large distances from the surfaces. We thus take

$$T_\omega = T_0 (1 + b \cos \omega t') \tag{1}$$

where t' is the time. The motion is caused by the action of oscillating buoyant body forces on the fluid near the surfaces. We assume that the system has been oscillating for a long time so that the transients have died out, and we can look for solutions which are varying only harmonically with time. We have derived the two dimensional and axi-symmetric viscous and thermal boundary layer equations following Wangs (1966) and thus studied the part played by curvature in the free convection flow. These equations are quite different than those mentioned by Goldstein which form the basis of the calculations of Merkin (1967). As in all problems of free convection there is no obvious typical velocity scale, and we find that the appropriate velocity scale in this case is $U = g\alpha T_0/\omega$, where g is the acceleration due to gravity and α is the coefficient of thermal expansion. In deducing the viscous and thermal boundary layer equations as well as in solving the problems we have assumed that the reduced frequency $S = a\omega/U$ is large, i.e. $\varepsilon = S^{-1} = g\alpha T_0/\omega^2 a$ is small where a is the radius of the cylinder or the sphere. The Raynolds number $\mathrm{Re} = Ua/\nu$ is assumed to be of the same order as S i.e. their ratio $(S/\mathrm{Re}) = m$ is of order unity, where ν is the kinematic coefficient of viscosity. The solution has been obtained by expanding all quantities involved in powers of ε. The vertical force experienced by the

cylinder and the sphere and the rate of heat transfer from them have been calculated. The vertical force experienced by the surfaces consists of three parts, the first one is due to the bouyancy terms in the equations of motion, the second one is due to the interaction of the curvature and the viscosity, and the third one is due to the variation of the pressure across the boundary layer. The rate of heat transfer from the cylinder and the sphere consists of two parts, the first one is due to the conduction of the fluid and the second one is due to the interaction of the curvature with the conduction. It is found that the effect of curvature on the vertical force experienced by the cylinder and the sphere and the rate of heat transfer from them are very significant.

2. EQUATIONS OF MOTION FOR A CYLINDER

We consider an infinite circular cylinder of radius a fixed with its axis horizontal, in a fluid which is almost incompressible, so that the changes in the density are important only in producing the buoyancy forces. The temperature of the cylinder $T\omega$ oscillates about a mean temperature T_0, which is the temperature of the surrounding fluid and is given by (1). The section of the cylinder by a plane perpendicular to its axis is a circle. There is no motion along the axis and hence the motion is two dimensional. Let θ denotes the angle made by the radius at any point with the downward drawn vertical and let r denotes the distance from the axis of the cylinder. If u' and v' be the components of the velocity in the directions of θ and r respectively, the boundary conditions of the problem are

$$u'=v'=0, \quad T=T_0(1+b\cos\omega t') \quad \text{at} \quad r=a, \tag{2}$$

$$u'\to 0, \quad T\to T_0 \quad \text{as} \quad r\to\infty. \tag{3}$$

The buoyancy force due to the density variations of the fluid at any point along the upward drawn vertical is $\rho g\alpha(T-T_0)$ where ρ is the density of the fluid. Taking this as body force, the equations of motion in the directions of θ and r are, respectively,

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}+v'\frac{\partial u'}{\partial r}+\frac{u'}{r}\frac{\partial u'}{\partial\theta}+\frac{u'v'}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p'}{\partial\theta}+g\alpha(T-T_0)\sin\theta+$$

$$+\nu\left[\frac{\partial^2 u'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v'}{\partial\theta}-\frac{u'}{r^2}\right] \tag{4}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'}+v'\frac{\partial v'}{\partial r}+\frac{u'}{r}\frac{\partial v'}{\partial\theta}-\frac{u'^2}{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial r}-g\alpha(T-T_0)\cos\theta+$$

$$+\nu\left[\frac{\partial^2 v'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v'}{\partial\theta^2}-\frac{v'}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u'}{\partial\theta}\right], \tag{5}$$

where p' is the pressure at any point. The equation of continuity is

$$\frac{\partial v'}{\partial r}+\frac{v'}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial\theta}=0. \tag{6}$$

The energy equation for the two dimensional flow when the viscous dissipation is neglected and when there is no heat source is given by

$$\frac{\partial T}{\partial t'}+v'\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{u'}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}=k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\right], \tag{7}$$

where T is the temperature at any point of the fluid and k is the thermometric conductivity. We make quantities dimensionless by assuming

$$t=\omega t', \qquad u'=Uu, \qquad v'=\varepsilon Uv$$

$$T-T_0=bT_0h, \qquad p'=\rho a\omega Up, \qquad r=a\,(1+\varepsilon y),$$

$$m=S/\mathrm{Re}=\nu\omega/v^2\sim 0\,(1), \tag{8}$$

where $\varepsilon=S^{-1}=U/a\omega$, $\mathrm{Re}=Ua/\nu$, $\sigma=\nu/k$ is the Prandtl number, and $U=g\alpha T_0/\omega$ is taken as typical velocity. Substituting (8) and neglecting terms of order ε^2, the equations (4) to (7) become

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon\left(u\frac{\partial u}{\partial\theta}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=h\sin\theta-\frac{\partial p}{\partial\theta}(1-\varepsilon y)+m\left(\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\varepsilon h\cos\theta, \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial y}+\varepsilon\left(v-y\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\varepsilon\left(u\frac{\partial h}{\partial\theta}+v\frac{\partial h}{\partial y}\right)=\frac{m}{\sigma}\left(\frac{\partial^2h}{\partial y^2}+\varepsilon\frac{\partial h}{\partial y}\right). \tag{12}$$

The equations (9) to (12) govern the distribution of velocity components, the pressure and the temperature within the boundary layer formed near the circular cylinder. These equations differ in the coefficients of ε from those mentioned by Goldstein (1938, pp. 610–13) which have been taken by Merkin (1967) as the basis of his calculations.

3. THE SOLUTIONS OF THE EQUATIONS

To solve these equations we assume

$$u=u_0+\varepsilon u_1, \qquad v=\sqrt{\frac{2m}{\sigma}}\,(v_0+\varepsilon v_1), \qquad h=h_0+\varepsilon h_1,$$

$$p=p_0+\varepsilon p_1, \qquad y=\sqrt{\frac{2m}{\sigma}}\,\eta. \tag{13}$$

The equation (10) shows that p_0 does not vary across the boundary layer and outside the boundary layer there is no pressure gradient. Hence $\frac{\partial p_0}{\partial\theta}=0$ inside the boundary layer region. Substituting (13), the equations (9) to (12) yield for the first approximation the following equations:

$$-\frac{\partial u_0}{\partial t}+h_0\sin\theta+\frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2u_0}{\partial\eta^2}=0, \tag{14}$$

$$-\frac{\partial h_0}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2h_0}{\partial\eta^2}=0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+\frac{\partial v_0}{\partial\eta}=0. \tag{16}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁR

The equations for the second approximation are

$$-\frac{\partial u_1}{\partial t}+h_1\sin\theta+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\eta^2}=u_0\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial\eta}-\sqrt{\frac{m\sigma}{2}}\frac{\partial u_0}{\partial\eta}+\frac{\partial p_1}{\partial\theta}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial\eta}=-\sqrt{\frac{2m}{\sigma}}h_0\cos\theta, \tag{18}$$

$$-\frac{\partial h_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_1}{\partial\eta^2}=u_0\frac{\partial h_0}{\partial\theta}+v_0\frac{\partial h_0}{\partial\eta}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{\sigma}}\frac{\partial h_0}{\partial\eta}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\frac{\partial v_1}{\partial\eta}=-\sqrt{\frac{2m}{\sigma}}\left(v_0+\eta\frac{\partial v_0}{\partial\eta}\right). \tag{20}$$

The first order equations are uneffected by the curvature and hence are exactly the same as given by Merkin (1967) but the equations for the second order approximation are quite different. The boundary conditions (2) and (3) give

$$u_0=v_0=u_1=v_1=0,\quad h_0=\cos t,\quad h_1=0 \text{ at } \eta=0$$

$$u_0\to 0,\quad u_1\to 0,\quad h_0\to 0,\quad h_1\to 0 \text{ as } \eta\to\infty \tag{21}$$

For $\sigma\neq 1$, the solution of the equations (14) to (16) satisfying (21) are given by

$$h_0=E(1,0), \tag{22}$$

$$u_0=\frac{\sin\theta}{\sigma-1}\cdot\left[E\left(1,\frac{\pi}{2}\right)-E\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}},\frac{\pi}{2}\right)\right], \tag{23}$$

$$v_0=\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}(\sigma-1)}\left[(\sqrt{\sigma}-1)\,E\left(0,\frac{\pi}{4}\right)+E\left(1,\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\sigma}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}},\frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{24}$$

where,

$$E(x,\beta)=e^{-x\eta}\cos(t-x\eta+\beta). \tag{25}$$

The expressions for u_0 and v_0 for $\sigma=1$ are given by

$$u_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\eta E\left(1,-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\theta, \tag{26}$$

$$v_0=\left[-\frac{1}{2}\eta E\left(1,\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{E\left(0,\frac{\pi}{4}\right)-E\left(1,\frac{\pi}{4}\right)\right\}\right]\cos\theta. \tag{27}$$

These expressions are the same as calculated by Merkin (1967). The solution for the first approximation and the equations (17) to (20) suggest the following forms for u_1, v_1 and h_1:

$$u_1=[f_1(t,\eta)+f_2(\eta)]\sin 2\theta+f_3(t,\eta)\sin\theta, \tag{28}$$

$$v_1=[g_1(t,\eta)+g_2(\eta)]\cos 2\theta+g_3(t,\eta)\cos\theta, \tag{29}$$

$$h_1=[\chi_1(t,\eta)+\chi_2(\eta)]\cos\theta+\chi_3(t,\eta). \tag{30}$$

The boundary conditions (21) give

$$f_1=f_2=f_3=g_1=g_2=g_3=\chi_1=\chi_2=\chi_3=0 \text{ at } \eta=0 \tag{31}$$

$$f_1\to 0,\quad f_2\to 0,\quad f_3\to 0,\quad \chi_1\to 0,\quad \chi_2\to 0,\quad \chi_3\to 0 \text{ as } \eta\to\infty,$$

substituting (22) to (30) in the equations (17) to (20) we get a set of ordinary linear differential equations for p_1, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, χ_1, χ_2 and χ_3. These equations have been solved under the boundary conditions (31). The expressions for f_1, f_2, g_1, g_2, χ_1 and χ_2 will be the same as given by Merkin (1967) and will not be reproduced here since they affect neither the rate of heat transfer from the cylinder nor the vertical force experienced by it. The functions p_1, f_3, g_3 and χ_3 do not appear in the calculations of Merkin (1967) and may be treated as correction to his solutions. These functions are given by, provided $\sigma\neq 1$,

$$p_1=\sqrt{\frac{m}{\sigma}}\,E\left(1,-\frac{\pi}{4}\right)\cos\theta, \tag{32}$$

$$f_3=\sqrt{\frac{m}{2\sigma}}\cdot\frac{\eta}{\sigma-1}\left[E\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}},\frac{\pi}{2}\right)-E\left(1,\frac{\pi}{2}\right)\right]+\sqrt{\frac{m}{\sigma}}\cdot\frac{1}{\sigma-1}\left[E\left(1,\frac{\pi}{4}\right)-E\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}},\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{33}$$

$$g_3=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{m}{\sigma}}\cdot\frac{\eta}{\sigma-1}\left[-E\left(1,\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{\sigma}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}},\frac{\pi}{4}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{2\sigma}}\cdot\frac{1}{\sigma-1}\left[E(1,0)+(\sigma-2\sqrt{\sigma})\,E\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}},0\right)-\right.$$

$$\left.-(1+\sigma-2\sqrt{\sigma})\cos t\right]-\sqrt{\frac{m}{\sigma}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma}+1}\,\eta\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right), \tag{34}$$

$$\chi_3=-\sqrt{\frac{m}{2\sigma}}\,\eta E(1,0). \tag{35}$$

For $\sigma=1$, the expressions for p_1 and χ_3 are given by (32) and (35) respectively but the expressions for f_3 and g_3 are given by

$$f_3=-\frac{\sqrt{m}}{2}\left(\eta^2 E\left(1,-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{m}{2}}-\eta E\left(1,\frac{\pi}{2}\right)\right), \tag{36}$$

$$g_3=\frac{\sqrt{m}}{2}\left[\frac{3}{\sqrt{2}}\eta^2 E\left(1,\frac{\pi}{2}\right)+\eta E\left(1,\frac{\pi}{4}\right)-\eta E\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{37}$$

4. OSCILLATORY FREE CONVECTION FROM A SPHERE

We consider a sphere of radius a in a fluid which is almost incompressible so that the changes in the density are important only in producing buoyancy forces. The temperature of the sphere is given by (1). The section of the sphere by a vertical plane through the centre of the sphere is a circle of radius a. There is no motion perpendicular to the plane of symmetry and hence the motion is axisymmetric. Let θ be the angle measured from the downward drawn vertical and r denotes the radial distance measured from the centre of the sphere. If u' and v' be the components of the velocity in the directions of θ and r respectively then the boundary conditions of the problem are

$$T=T_0(1+b\cos\omega t'), \qquad u'=v'=0 \quad \text{at} \quad r=a \tag{38}$$
$$T\to T_0, \quad u'\to 0 \quad \text{as} \quad y\to\infty.$$

Using substitution and approximations similar to those of (8) and (13) the axisymmetric equations of motion reduce to

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}=\frac{\delta}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\eta^2}+h_0\sin\theta, \tag{39}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+\frac{\partial v_0}{\partial\eta}+u_0\cot\theta=0, \tag{40}$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_0}{\partial\eta^2}, \tag{41}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\eta^2}=-\frac{\partial p_1}{\partial\theta}+h_1\sin\theta-v_0\frac{\partial u_0}{\partial\eta}-u_0\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+\sqrt{2\sigma m}\frac{\partial u_0}{\partial\eta}, \tag{42}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\frac{\partial v_1}{\partial\eta}+u_1\cot\theta=-\sqrt{\frac{2m}{\sigma}}\left(\eta\frac{\partial v_0}{\partial\eta}+2v_0\right), \tag{43}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_1}{\partial\eta^2}=-v_0\frac{\partial h_0}{\partial\eta}-u_0\frac{\partial h_0}{\partial\theta}+\sqrt{\frac{2m}{\sigma}}\frac{\partial h_0}{\partial\eta}, \tag{44}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial\eta}=-\sqrt{\frac{2m}{\sigma}}h_0\cos\theta, \tag{45}$$

with the boundary conditions

$$u_0=v_0=u_1=v_1=0, \quad h_0=\cos t, \quad h_1=0 \quad \text{at} \quad \eta=0,$$
$$u_0\to 0, \quad u_1\to 0, \quad h_0\to 0, \quad h_1\to 0 \quad \text{as} \quad \eta\to\infty. \tag{46}$$

For $\sigma\neq 1$, the solution of these equations are given by

$$h_0=E\,(1,\ 0), \tag{47}$$

$$u_0=\frac{\sin\theta}{\sigma-1}\left[E\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)-E\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}},\ \frac{\pi}{2}\right)\right], \tag{48}$$

$$v_0=\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\sigma-1}\left[(\sqrt{\sigma}-1)\ E\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)+E\left(1,\ \frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\sigma}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}},\ \frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{49}$$

For $\sigma=1$, h_0 is given by (47) and the expression for u_0 and v_0 are given by

$$u_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\sin\theta\cdot E\left(1,-\frac{\pi}{4}\right) \tag{50}$$

$$v_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\cdot\left[E\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\,\eta\,E\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)-E\left(1,\ \frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{51}$$

The solutions (47) to (49) and the equations (42) to (45) suggest the following forms for h_1, u_1 and v_1:

$$h_1=[\chi_1(t,\eta)+\chi_2(\eta)]\cos\theta+\chi_3(t,\eta), \tag{52}$$

$$u_1=[f_1(t,\eta)+f_2(\eta)]\sin 2\theta+f_3(t,\eta), \tag{53}$$

$$v_1=[g_1(t,\eta)+g_2(\eta)]\{3\cos 2\theta+1\}+g_3(t,\eta)\cos\theta. \tag{54}$$

The boundary conditions (46) give

$$\chi_1=\chi_2=\chi_3=f_1=f_2=f_3=g_1=g_2=g_3=0 \text{ at } \eta=0$$

$$\chi_1\to 0,\ \chi_2\to 0,\ \chi_3\to 0,\ f_1\to 0,\ f_2\to 0,\ f_3\to 0 \text{ as } \eta\to\infty. \tag{55}$$

Substituting (47) to (54) in the equations (42) to (45) we get a set of ordinary linear differential equations for p_1, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, χ_1, χ_2 and χ_3 which can be solved under the boundary conditions (55). These solutions are lengthy and they are similar in form as the corresponding terms for the case of a cylinder. These solutions are not reproduced here and may be obtained from the authors.

It is seen that in both the cases of cylinder and sphere undetermined constants appear in the expressions for f_2, g_2 and χ_2 and they do not satisfy boundary conditions at infinity. This is due to the defect of the perturbation method we used. In the first approximation we have neglected the convective part of the inertia force in comparison with the buoyancy force. This is true near the heated wall but at large distance from the wall the convective terms of the inertia force is of the same order as buoyancy force. An outer layer solution when matched with the inner layer will determine the undetermined constants. This, however, has not been attempted. The expressions satisfy the boundary conditions at the wall and the undetermined constants do not appear in the expressions for the vertical force experienced by the surfaces and the rate of heat transfer from them. Hence the expressions give correct results in the region near the surfaces.

5. DISCUSSION

The expression for τ_{rr} and $\tau_{r\theta}$, the normal and Shearing stresses for both the cylinder and the sphere are given by

$$\tau_{rr}=-p'+2\mu\frac{\partial v'}{\partial r},$$

$$\tau_{r\theta}=\mu\left[\frac{\partial u'}{\partial r}-\frac{u'}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial\theta}\right],$$

where μ is the coefficient of viscosity of the fluid.

Substituting (8) in the expressions for stresses and neglecting terms of order ε^2 and higher order of ε we get,

$$\tau_{rr}=-\rho U^2 p_1,$$

$$\tau_{r\theta}=\rho U^2\sqrt{\frac{\sigma m}{2}}\left[\frac{\partial u_0}{\partial\eta}+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right].$$

The non-dimensional force on the circular cylinder per unit length in the vertical direction is given by

$$F_c=[2\int_0^{\pi}\tau_{r\theta}\sin\theta-\tau_{rr}\cos\theta)_{\eta=0}a\,d\theta]/(\pi\rho aU^2)=M_c\cos(t-\lambda_c).$$

If we work out the force on the basis of Merkin's (1967) calculation, we shall get

$$F_c = M \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

The non-dimensional force on the sphere in the vertical direction is given by

$$F_s = [\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \{\tau_{r\theta} \sin\theta - \tau_{rr} \cos\theta\}_{\eta=0} a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi] / (4\pi a^2 \rho U^2) = M_s \cos(t - \lambda_s).$$

Taking $m=1$, $\varepsilon=0.1$, the values M, M_c, λ_c, M_s and λ_s have been given in table I. The results show that for both the cases (cylinder and sphere) the amplitude of oscillations of the vertical buoyancy force decreases with the increase of σ and it has a phase lag over the oscillations of the temperature of the surfaces. This phase lag always remains greater than $\pi/4$ and for large σ it tends to coincide with $\pi/4$. Comparing M and M_c we see that the consideration of the effect of curvature gives a higher value of the amplitude of oscillation of the vertical buoyancy force than that obtained when calculated on the basis of Merkin's work.

Table I

σ	M	M_c	M_s	λ_c (in degrees)	λ_s (in degrees)
0,7	0,544	1,787	0,793	46,467	47,217
1,0	0,500	1,536	0,691	46,318	46,954
2,0	0,414	1,142	0,526	46,049	46,501
5,0	0,309	0,766	0,362	45,728	46,020
10,0	0,240	0,562	0,269	45,550	45,756
20,0	0,183	0,409	0,198	45,407	45,550
50,0	0,124	0,267	0,131	45,258	45,373
100,0	0,091	0,192	0,094	45,201	45,258

The heat flux from any point on the cylinder or the sphere is given by

$$q_\theta = -k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=a} = -\rho g C_p U b T_0 \sqrt{\frac{m}{2\sigma}} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$$

where k is the thermal conductivity and C_p is the specific heat with constant pressure. The nondimensional rate of heat transfer per unit length, from the surface of the cylinder is given by

$$Q_c = [\int_0^{2\pi} q_\theta \, a \, d\theta] / (2\pi \rho a g C_p U b T_0) = L_c \cos(t + \gamma_c)$$

and that for the sphere is given by

$$Q_s = [\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} q_\theta a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi] / (4\pi a^2 \rho g C_p U b T_0] = L_s \cos(t + \gamma_s).$$

If we work out the rate of heat transfer from the cylinder on the basis of Merkin's calculations we shall get

$$Q_c = L \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Taking $m=1$, $\varepsilon=0$ 1, the values of L, L_c, L_s, γ_c and γ_s have been given in table 2 for various values of σ. The amplitude of oscillations of the rate of heat transfer decreases with the increase of σ and it has a phase lead over the oscillations of the temperature of the surfaces. This phase lead increases with the increase of σ and tend to coincide with $\pi/4$ for large σ. Comparing L and L_c we see that the consideration of the effect of curvature gives a higher value of the rate of heat transfer than that obtained when calculated on the basis of Merkin's calculation.

Table 2

σ	L	L_c	L_s	γ_c (in degrees)	γ_s (in degrees)
0,7	1,195	1,247	1,300	42,676	40,530
1,0	1,100	1,036	1,073	43,045	41,218
2,0	0,707	0,725	0,743	43,591	42,271
5,0	0,447	0,454	0,461	44,098	43,259
10,0	0,316	0,320	0,323	44,362	43,741
20,0	0,224	0,225	0,227	44,538	44,098
50,0	0,141	0,142	0,143	44,712	44,421
100,0	0,100	0,100	0,101	44,798	44,596

REFERENCES

1. Merkin, y. H., J. Fluid Mech., 1967, *30*, 561.
2. Schlichting, H., Phys. Z., 1932, *33*, 327.
3. Wangs, C. Y., Q. Appl. Maths, 1966, *39*, 305.

EFECTUL CURBURII ASUPRA CONVECȚIEI LIBERE OSCILATORII

(REZUMAT)

Se discută efectul curburii asupra convecției libere oscilatorii într-un fluid vîscos incompresibil, considerîndu-se stratul limită pe un cilindru circular orizontal fix sau pe o sferă, ale căror temperatură oscilează armonic cu frecvența ω în jurul unei temperaturi medii T_0, care e temperatura la mari distanțe de suprafețe. Se deduce că efectul curburii este de a mări viteza transferului de căldură de la suprafețe și de a mări forța verticală asupra cilindrului și a sferei.

ЭФФЕКТ КРИВИЗНЫ ПРИ СВОБОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ КОНВЕКЦИИ

(РЕЗЮМЕ)

Рассматривается эффект кривизны при свободной колебательной конвекции в несжимаемой вязкой жидкости, считая предельный слой на горизонтальном неподвижном круговом цилиндре или на сфере, температура которых колебается гармонически с частотой, около средней температуры T_0, являющаяся температурой на больших расстояниях от поверхности.

Установлено, что эффект кривизны увеличивает скорость перевода тепла от поверхности и вертикальное усилие на цилиндр и сферу.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

APLICAŢII MULTIVOCE APROAPE PERIODICE

DE

T. BĂNZARU

Fie F o aplicaţie multivocă de la dreapta reală R la un spaţiu uniform $(Y, \mathfrak{K})$.

Definiţia 1,

Vom spune că aplicaţia multivocă $F: R \to (Y, \mathfrak{K})$ este aproape periodică, dacă $\forall K \in \mathfrak{K}$, există un număr pozitiv $l(K)$, astfel încît orice interval compact de lungime $l(K)$, conţine un număr $\tau(K) = \tau$, cu proprietatea:

$$F(x+\tau) \subset K(F(x)) \quad \text{şi} \quad \forall y \in F(x),\ K(y) \cap F(x+\tau) \neq \emptyset \qquad (1)$$

$$\forall x \in R.$$

Teorema I.

Orice aplicaţie multivocă Y-compactă $F: R \to (Y, \mathfrak{K})$ aproape periodică, este uniform continuă pe R.

Demonstraţie

Fie dat $K \in \mathfrak{K}$ şi fie K' şi K'' anturaje simetrice din $\mathfrak{K}$ astfel ca $K' \circ K' \subset K$ şi $K'' \circ K'' \subset K'$.

Fie $l = l(K' \cap K'')$.

Aplicaţia multivocă F este continuă pe intervalul compact $[-1, 1+l]$ deci uniform continuă pe acest interval întrucît este şi Y-compactă. Există deci un număr pozitv η astfel încît $y' \in [-1, 1+l]$, $y'' \in [-1, 1+l]$ şi $|y'' - y'| < \eta$ implică:

$$F(y'') \subset K''(F(y')) \quad \text{şi} \quad \forall z \in F(y'),\ K''(z) \cap F(y'') \neq \emptyset. \qquad (2)$$

Fie acum x_1 şi x_2 două numere reale astfel încît $|x_1 - x_2| < \eta$. Există atunci o $K' \cap K''$ aproape perioadă a lui F, fie aceasta τ. astfel încît $-x_1 \leqslant \tau \leqslant -x_1 + l$ sau $0 \leqslant x_1 + \tau \leqslant l$. Prin urmare vom avea şi $-1 \leqslant x_2 + \tau \leqslant 1 + l$.

Întrucît τ este o $K' \cap K''$ aproape perioadă avem:

$$F(x_1+\tau) \subset K''(F(x_1)) \quad \text{şi} \quad \forall y \in F(x_1),\ K''(y) \cap F(x_1+\tau) \neq \emptyset. \qquad (3)$$

$$F(x_2+\tau) \subset K'(F(x_2)) \quad \text{şi} \quad \forall z \in F(x_2),\ K'(z) \cap F(x_2+\tau) \neq \emptyset. \qquad (4)$$

Deoarece $|(x_1+\tau)-(x_2+\tau)|<\eta$ și $x_1+\tau,\ x_2+\tau\in[-1,\ 1+l]$ avem și:

$$F(x_2+\tau)\subset K''(F(x_1+\tau)) \text{ și } \forall u\in F(x_1+\tau),\ K''(u)\cap F(x_2+\tau)\neq\emptyset. \quad (5)$$

Din (3) $\forall y\in F(x_1)$, $K''(y)\cap F(x_1+\tau)\neq\emptyset$. Deci $\exists u\in K''(y)$ și $u\in F(x_1+\tau)$ și prin urmare $(y, u)\in K''$. Dar $u\in F(x_1+\tau)\Rightarrow$conform relației (3), $K''(u)\cap F(x_2+\tau)\neq\emptyset$. Deci $\exists v\in K''(u)$ și $v\in F(x_2+\tau)$. Aceasta atrage $(u, v)\in K''$. Prin compunere obținem atunci $(y, v)\in K''\circ K''\subset K'$. Însă $v\in F(x_2+\tau)\Rightarrow v\in K'(F(x_2))\Rightarrow$ $\Rightarrow\exists u_2\in F(x_2)$ astfel ca $(u_2, v)\in K'$. Cum însă $(v, y)\in K'$, avem $(u_2, y)\in K'\circ K'\subset K$ deci avem:

$$F(x_1)\subset K(F(x_2)),\ \forall x_1,\ x_2\in R \text{ cu } |x_1-x_2|<\eta \quad (6)$$

Din (4) avem însă $\forall y\in F(x_2)$, $K'(y)\cap F(x_2+\tau)\neq\emptyset$, deci $\exists v\in K'(y)\cap F(x_2+\tau)$, adică $(y, v)\in K'$. Dar $v\in F(x_2+\tau)$ și deci din (5) $v\in K''(F(x_1+\tau))$. Așa dar $\exists u\in F(x_1+\tau)$ astfel ca $(u, v)\in K''$. Însă $u\in F(x_1+\tau)\Rightarrow$ conform lui (3), că $u\in K''(F(x_1))$, adică $\exists u_1\in F(x_1)$ astfel ca $(u_1, u)\in K''$. Prin compunere obținem $(u_1, v)\in K''\circ K''\subset K'$ și cum K' este anturaj simetric avem:

$$(v,\ u_1)\in K' \quad (7)$$

Din raționamentul de mai sus avem și $(y, v)\in K'$ și deci împreună cu (7) $(y, u_1)\in K'\circ K'$, deci $u_1\in K(y)$, $\forall y\in F(x_2)$.

Aceasta implică relația:

$$\forall y\in F(x_2),\quad K(y)\cap F(x_1)\neq\emptyset,\quad \forall x_1, x_2\in R,\quad |x_1-x_2|<\eta \quad (8)$$

Relațiile (6) și (8) demonstrează complet teorema.

Teorema II.

Dacă $(F_\alpha)_{\alpha\in D}$ este un șir generalizat de aplicații multivoce aproape periodice ale dreptei reale R în spațiul uniform $(Y, \mathfrak{R})$ și $(F_\alpha)_{\alpha\in D}$, este uniform convergent pe R către aplicația multivocă Y-compactă $F: R\to Y$, atunci F este aproape periodică pe R.

Demonstrație

Fie $K\in\mathfrak{R}$ dat și K' și K'' două anturaje simetrice astfel ca $K''\circ K''\subset K'$ și $K'\circ K'\subset K$.

Conform [4], F este continuă pe R și datorită uniform convergenței șirului generalizat $(F_\alpha)_{\alpha\in D}$, $K\in\mathfrak{R}$ fiind dat $\exists\beta(K)$ astfel ca $\forall\alpha\geqslant\beta$ și $\forall x\in R$ să avem:

$$F_\alpha(x)\subset K'(F(x)) \text{ și } \forall y\in F(x),\quad K'(y)\cap F_\alpha(x)\neq\emptyset \quad (9)$$

$$F_\alpha(x)\subset K''(F(x)) \text{ și } \forall y\in F(x),\quad K''(y)\cap F_\alpha(x)\neq\emptyset \quad (10)$$

Fixînd un $\alpha\geqslant\beta(K)$ și considerînd o K'' aproape perioadă a lui F_α, fie aceasta τ, vom avea:

$$F_\alpha(x+\tau)\subset K''(F_\alpha(x)) \text{ și } \forall z\in F_\alpha(x),\ K''(z)\cap F_\alpha(x+\tau)\neq\emptyset \quad (11)$$

Conform relației (9) putem scrie relația :

$$F_\alpha(x+\tau) \subset K'(F(x+\tau)) \text{ și } \forall u \in F(x+\tau). \quad (12)$$

$$K'(u) \cap F_\alpha(x+\tau) \neq \emptyset.$$

Din (10), (11) și (12) vom avea :

$\forall y \in F(x)$ conform (10) $\Rightarrow K''(y) \cap F_\alpha(x) \neq \emptyset$, ceea ce atrage $\exists z \in F_\alpha(x)$ și $z \in K''(y)$, adică

$$(y, z) \in K'' \quad (13)$$

Dar $z \in F_\alpha(x) \Rightarrow$ conform (11), $K''(z) \cap F_\alpha(x+\tau) \neq \emptyset$. Există deci $t \in F_\alpha(x+\tau)$ și $t \in K''(z)$ ceea ce înseamnă

$$(z, t) \in K'' \quad (14)$$

Din (13) și (14) $\Rightarrow$

$$(y, t) \in K'' \circ K'' \subset K' \quad (15)$$

Dar $t \in F_\alpha(x+\tau)$ conform lui (12) $\Rightarrow t \in K'(F(x+\tau))$ și deci $\exists u \in F(x+\tau)$ astfel ca $(u, t) \in K'$ ceea ce datorită simetriei lui K' atrage

$$(t, u) \in K'. \quad (16)$$

Din (15) și (16) $\Rightarrow (y, u) \in K' \circ K' \subset K$, adică $\forall y \in F(y)$, $\exists u \in F(x+\tau)$ astfel ca $u \in K(y)$, ceea ce înseamnă că avem :

$$\forall y \in F(x), \; K(y) \cap F(x+\tau) \neq \emptyset. \quad (17)$$

Fie acum $u \in F(x+\tau)$. Atunci conform relației (12), $K'(u) \cap F(x+\tau) \neq \emptyset$. Există așa dar $v \in F(x+\tau)$ astfel ca $v \in K'(u)$, adică $(u, v) \in K'$. Cum K' este anturaj simetric vom avea și

$$(v, u) \in K' \quad (18)$$

Conform (11), deoarece $v \in F(x+\tau) \Rightarrow v \in K''(F_\alpha(x))$ ceea ce implică $\exists z \in F_\alpha(x)$ astfel ca :

$$(z, v) \in K''. \quad (19)$$

Însă $z \in F_\alpha(x)$ conform relației (10) $\Rightarrow z \in K''(F(x))$ și deci $\exists y \in F(x)$ astfel ca :

$$(y, z) \in K'' \quad (20)$$

Din (19) și (20) deducem :

$$(y, v) \in K'' \circ K'' \subset K' \quad (21)$$

Din (21) și (18) obținem :

$$(y, u) \in K' \circ K' \subset K \quad (22)$$

adică $u \in K(y)$. Aceasta ne conduce la incluziunea

$$F(x+\tau) \subset K(F(x)). \tag{23}$$

Continuitatea aplicației multivoce F și relațiile (17) și (23) dovedesc aproape periodicitatea aplicației multivoce, F, și cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Consecință

Dacă $(F_\alpha)_{\alpha \in D}$ este un șir generalizat de aplicații multivoce aproape periodice ale dreptei reale R în spațiul uniform $(Y, \mathfrak{R})$ și $(F_\alpha)_{\alpha \in D}$, este uniform convergent pe R către aplicația multivocă Y-compactă $F: R \to Y$, atunci F este uniform continuă pe R.

Primită la redacție la data de 2 V. 1973.

BIBLIOGRAFIE

1. T. Bânzaru, Continuitatea și continuitatea uniformă a aplicațiilor multivoce dintre spații uniforme. Bul. șt. și Teh. al I.P.T., Tom 18(32) Fasc 2. 1973 pag. 129.
2. N. Corduneanu, *Funcții aproape periodice*. Ed. Acad. R.P.R. 1961.
3. M. Nicolescu, *Analiză matematică* Vol. II, Ed. tehnică București 1958.
4. R. E. Smithson, Uniform convergence for multifunctions. Pac. Journal of Math. Vol. 39, No.1, 1971.
5. W. J. Thron, *Topological Structures*. Holt Rinehart 1966.

МНОГОМЕРНЫЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

(РЕЗЮМЕ)

В работе определяется понятие многомерного почти периодического отображения и доказываются теоремы связывающие эти отображения с одновремеными непрерывными отображениями, а так же теорема для равномерно-сходящихся рядов многомерных почти периодических отображений.

FASTPERIODISCHE MEHRDEUTIGE ABBILDUNGEN

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff der fastperiodischen mehrdeutigen Abbildung definiert. Es werden Sätze bewiesen welche diese Abbildungen mit den gleichstetigen Abbildungen verbinden, sowie auch ein Satz für gleichstetige Reihen von fastperiodischen mehrdeutigen Abbildungen.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

COMPLÉMENTS AU TRAITÉ DE MITRINOVIC (V.) QUELQUES INÉGALITÉS INTEGRALES REMARQUABLES.

PAR

GH. TUDOR

1. Nous considèrons l'inégalité de Fejér-Jackson

$$\varphi_n(x)=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}>0, \quad x\in(0,\pi), \quad n\in N \tag{1}$$

Par la substitution de x avec $\pi-x$ dans (1), nous obtenons l'inégalité suivante

$$\tilde{\varphi}_n(x)=\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}>0, \quad x\in(0,\pi), \quad n\in N \tag{2}$$

En faisant la somme des inégalités (1) et (2) nous obtenons une nouvelle inégalité :

$$\Psi_m(x)=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots+\frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}>0, \quad x\in(0,\pi), \quad m=0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

Lemme 1. Soient $u_k (k=0, 1, 2, \ldots m)$ des nombres réels tels que

$$u_k\geqslant u_{k+1}>0 \quad (k=0, 1, 2, \ldots m-1) \tag{4}$$

Alors nous avons l'inégalité

$$\Phi_m(x)\overset{\text{df}}{=}\sum_{k=0}^{m} u_k\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}>0, \quad x\in(0,\pi), \quad m=0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Pour la démonstration de cette afirmation voir [1].

Corollaire 1. Soient $u_k: (0,\pi)\to R^+$ des fonctions dont les valeurs pour tout x vérifient la condition (4). Alors on a l'inégalité

$$F_m(x)\overset{\text{df}}{=}\sum_{k=0}^{m} u_k(x)\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}>0, \quad x\in(0,\pi) \tag{6}$$

2. Soit maintenant u une fonction définie sur $(0,\pi)$, telle que $0<u(x)\leqslant 1$ pour $x\in(0,\pi)$.

Alors les fonctions $u_k(x)=u^k(x)$ vérifient les conditions du corollaire 1. Nous avons l'inégalité :

$$f_m(x)\overset{\text{df}}{=}\sum_{k=0}^{m} u^k(x)\,\frac{\sin(2k+1)\,x}{2k+1}>0,\quad x\in(0,\ \pi) \tag{7}$$

Dans la suite, nous supposons la fonction u dérivable sur $(0, \pi)$ et nous avons:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{u(x)}\,f_m(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{m} u^{k+\frac{1}{2}}(x)\,\frac{\sin(2k+1)\,x}{2k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m} u'(x)\,u^{k-\frac{1}{2}}(x)\sin(2k+1)\,x+$$

$$+\sum_{k=0}^{m} u^{k+\frac{1}{2}}\cos(2k+1)\,x$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{u(x)}\,f_m(x)\right)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\,G_m(x,\ u)+\sqrt{u(x)}\ H_m\ (x,\ u) \tag{8}$$

où, après la sommation, nous avons noté

$$G_m(x,\ u)=\frac{u^{m+2}\sin(2m+1)\,x-u^{m+1}\sin(2m+3)\,x+u\sin x+\sin x}{u^2-2u\cos 2x+1}$$

$$H_m(x,\ u)=\frac{u^{m+2}\cos(2m+1)\,x-u^{m+1}\sin(2m+3)x-u\cos x+\cos x}{u^2-2u\cos 2x+1}. \tag{9}$$

En intégrant la rélation (8), nous déduisons le

Thêorème. Soit u une fonction définie sur $(0, \pi)$, dérivable et telle que $0<u(x)\leqslant 1$ pour tout $x\in(0, \pi)$. Alors on a l'inégalité intégrale :

$$f_m(x)=\frac{1}{\sqrt{u(x)}}\int_0^x\left[\frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}\,G_m(t,\ u(t))+\sqrt{u(t)}\,H_m(t,\ u(t))\right]dt>0. \tag{10}$$

3. Nous allons maintenant déduire du notre théorème quelques inégalités remarquables, à notre avis intéressantes et avec les possibilités pour des applications.

I. Nous prenons $u(x)=\cos 2\,x$, $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ et nous obtenons de l'inégalité:

$$\int_0^x(\cos 2\,t)^{m+\frac{1}{2}}\,\frac{\sin(2m+3)\,t}{\sin 2t}\,dt>\frac{1}{2}\arcsin(\operatorname{tg}x) \tag{11}$$

$$x\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right),\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

où en faisant la substitution $2t=\theta$, nous obtenons

$$\int_0^x (\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(m+\frac{3}{2}\right)\theta}{\sin\theta}\,d\theta > \arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) \tag{11'}$$

$$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

II. Pour $u(x)=2\cos 2x$, $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$, nous obtenons de (10)

$$\int_0^x (\cos 2t)^{m+\frac{1}{2}} \cos(2m+1)t\,dt > \frac{1}{2^{m+1}\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}\sin x) \tag{12}$$

$$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right),\quad m=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

où en faisant la substitution $2t=\theta$ dans (12), nous obtenons :

$$\int_0^x (\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}} \cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta\,d\theta > \frac{1}{2^{m+\frac{1}{2}}} \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right) \tag{12'}$$

$$x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right),\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

III. En fin, nous prenons $u(x)=\frac{1}{2\cos 2x}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$ et nous obtenons :

$$\int_0^x \frac{\cos(2m+1)t}{(\cos 2t)^{m+\frac{1}{2}}}\,dt < \frac{2^m}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}\sin x) \tag{13}$$

$$x\in\left(0,\frac{\pi}{5}\right],\quad m=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

où en faisant la substitution $2t=\theta$ dans (13), nous obtenons :

$$\int_0^x \frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}{(\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}}\,d\theta < 2^{m+\frac{1}{2}} \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right) \tag{13'}$$

$$x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right],\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Des cas particulières plus intéressantes de (12′) et (13′) sont :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}} \cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta\, d\theta > \frac{1}{2^{m+\frac{1}{2}}} \frac{\pi}{4}, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{14}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}{(\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}} d\theta < 2^{m+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi}{4}, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{15}$$

BIBLIOGRAFIE

1. B. Crstici et Gh. Tudor, Complements au traite de mitrinović II. sur quelques inegalitè integrales, Publications de la Faculté d'électrotechnique de l'Université à Belgrad Série : Mathématiques et Physique Nr. 381–Nr. 409 (1972).

2. D. S. Mitrinović (in cooperation with] P. M. Vasić), *Analytic inequalities*. Berlin-Heidelberg – New York 1972.

COMPLEMENTE LA TRATATUL LUI MITRINOVICI (V). CÎTEVA INEGALITĂȚI INTEGRALE REMARCABILE

(REZUMAT)

În prezenta lucrare, autorul dă o teoremă referitoare la o inegalitate integrală cu caracter aplicativ. Din această inegalitate, se obțin apoi cîteva inegalități integrale particulare interesante, cu posibilități de utilizare în aplicații.

ДОПОЛНЕНИЕ К ТРАКТАТУ МИТРИНОВИЧА (V) НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

(РЕЗЮМЕ)

В В настоящей работе автор дает озну теорему относящуюся на одно интегральное неравенство с возможностю применения. Из этого неравенства получаются несколько интресных особых интегральных нерав нств.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

EINE SPEZIELLE KLASSE VON SCHWACHEN LOOPS (I)

VON

J. TĂUBER

Die vorliegende Arbeit ist ein Teil meiner Dissertation: „Beiträge zur Lösung einiger Funktionalgleichungen vom Typus Cauchy auf einer speziellen Klasse von schwachen Loops", die ich am 15. Juli 1972 an der Fakultät für Mathematik-Mechanik der Universität Timişoara verteidigte. Sie wurde von Herrn Prof. Dr. Oct. Em. Gheorghiu angeregt und gefördert. Dafür möchte ich ihm herzlich danken.

In der Dissertation wurden zwei Hauptziele verfolgt:

— Die Angabe einer neuen Verallgemeinerungsmöglichkeit der bekannten Cauchyschen Funktionalgleichungen und

— das Lösen dieser Gleichungen auf einer abstrakten allgebraischen Struktur (S-Loop).

Teile aus dieser Arbeit werden auch in anderen Zeitschriften erscheinen. Desgleichen möchte ich noch hinzufügen, daß eine andere Reihe von Arbeiten sich mit ähnlichen Problemen auseinander setzen wird, in denen nichtarhimedisch angeordnete Strukturen verwendet werden.

Aus der vorgefundenen Literatur ist uns die Klasse von S-Loops unbekannt. Sie bietet eine neue Richtung für Verallgemeinerungen einiger bekannten Resultate [1], [7], [8].

1. DAS AXIOMENSYSTEM VON S-LOOPS UND EINIGE SICH UNMITTELBAR DARAUS ERGEBENDE SÄTZE

Es sei X eine angeordnete (lineare) nichtleere Menge (Kette) in der mit „$\geqslant$" die Ordnungsrelation bezeichnet wird. Auf X sei noch eine binäre algebraische Verknüpfung „$*$" definiert die folgende Axiome erfüllt:

A_1. Ist $x'>x$ dann existiert wenigstens ein $x'' \in X$, so daß $x'=x''*x$, für alle $x,\ x' \in X$.

A_2. Es existiert wenigstens ein neutrales Element $e \in X$, so daß $e*x=x*e=x$, für jedes $x \in X$.

A_3 Ist $x''>x'$ folgt $x*x''>x*x'$ und $x''*x>x'*x$ für alle $x,\ x',\ x'' \in X$.

A_4. $\cdot x^m*x^n=x^{m+n}$ für jedes $x \in X$ wobei $x^{m+1} := x*x^m$; $x^1 := x$; $x^\circ := e$; $m,\ n \in N_0=N \cup \{0\}$

Definition 1.1. Eine algebraische Struktur $(X, *)$, die den Axiomen A_{1-4} genügt, heißt linke S-Loop.

Axiom A_1 zusammen mit A_2 besagt, daß die Struktur $(X, *)$ eine schwache linke Loop ist, sie ist eine natürlich geordnet algebraische Struktur [3], weil A_2 und das Monotoniegesetz A_3 erfüllt ist. Gleichzeitig ist die Struktur $(X, *)$ potenz-assoziativ (A_4).

Definiton 1.2. Eine algebraische Struktur $(X, *)$ heißt rechte S-Loop, wenn in A_1 ein Element $x_1 \in X$ existiert, so daß $x' = x * x_1$ bzw. A_{2-4} bestehen bleibt.

Definition 1.3. Ist $(X, *)$ sowohl eine linke als auch eine rechte S-Loop, so wird sie S-Loop genannt.

Wir wollen nun zeigen, daß die Axiome $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ ein unabhängiges Axiomensystem bilden. Es sei $A = \{A_1, A_2 \ldots, A_n\}$ ein System von Axiome. Axiom $A_i \in A$ ist *abhängig* von den anderen Axiomen aus A, sobald aus den Axiomen $A_1, A_2 \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_b$ das Axiom A_i als Satz folgt. Ist dies nicht der Fall, so heißt A_i ein *unabhängig* Axiom aus A. Daraus ergibt sich, daß das Axiom A_i aus A, dann und nur dann unabhängig ist, sobald gezeigt wird, daß die Hypothese: A_i folgt aus $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ als Satz, falsch ist. Folglich, muß ein *Modell* gefunden werden, in dem $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ erfüllt ist, A_i aber nicht. Das Axiomensystem A heißt *unabhängig*, wenn jedes Axiom $A_i \in A$ unabhängig ist. Somit wird die Unabhängigkeit eines Systems von n Axiomen durch n Modelle gezeigt.

Nun wird an Hand von vier Modellen gezeigt, daß $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ ein unabhängiges Axiomensystem bildet.

A_1 ist unabhängig von A_2, A_3, A_4:

Die Struktur $(N, \cdot)$ erfüllt A_2, A_3, A_4, während A_1 nicht für alle Elemente aus N erfüllt ist· (N ist die Menge der natürlichen Zahlen; mit „·“ wird die Multiplikation bezeichnet).

A_2 ist unabhängig von A_1, A_3, A_4:

Die Struktur $(N, +)$ erfüllt A_1, A_3, A_4, während A_2 nicht erfüllt ist.

A_3 ist unabhängig von A_1, A_2, A_4:

Die Struktur $(R/0, \cdot)$ erfüllt A_1, A_2, A_4. Das Monotoniegesetz A_3 ist nicht für alle Elemente aus $R/0$ erfüllt. (Ublicherweise bezeichnen wir mit $R/0 = R/\{0\}$.)

A_4 ist unabhängig von A_1, A_2, A_3:

Die Struktur $(R_+^\circ, *)$ erfüllt A_1, A_2, A_3, während A_4 nicht erfüllt ist, wobei $R_+^\circ = \{x | x \geqslant 0,\ x \in R\}$ und $x * y = y * x = 2x + y$ für $x \leqslant y$, $x, y \in R_+^\circ$.

Beim Nachprüfen der vier Modelle haben wir assoziative Strukturen verwendet, die offensichtlich auch potenz-assoziativ sind. Wir wollen nun zwei Beispiele von nichtassoziativen Strukturen angeben, die S-Loops sind.

Beispiel 1.1. Es sei Z die Menge der ganzen Zahlen und $X = \{2n | n \in Z\}$. Auf X wird folgende Verknüpfung definiert:

$$x * y = \begin{cases} x + y; & x \geqslant 0 \vee y \geqslant 0 \\ -xy; & x < 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$

$(X, *)$ ist eine kommutative S-Loop (nichtassoziativ).

Beispiel 1.2. Es sei

$$X = \left\{ x | x = \begin{Vmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix};\ a, b, c \in R \right\}.$$

Auf X führen wir folgende lineare Ordnungsrelation ein: $x_1 > x_2$ falls $a_1 > a_2$ oder $a_1 = a_2$, $b_1 > b_2$ oder $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 > c_2$ und $x_1 = x_2$ falls $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$. Wir definieren noch folgende Verknüpfung:

$$x * y = \rho x \cdot y + (1 - \rho) y \cdot x\,; \quad \rho \in R$$

wobei mit „·" die Matrizenmultiplikation bezeichnet wird. $(X, *)$ ist eine nichtkommutative S-Loop (nichtassoziativ).

Aus dem Axiomensystem A_{1-4} ergeben sich mehrere offensichtliche Sätze:

Satz 1.1. Jede linke S-Loop $(X, *)$ ist regulär.

Eine linke S-Loop $(X, *)$ heißt *regulär*, wenn die Kürzungsregeln erfüllt sind, d.h. aus $x*x'' > x*x'$ und aus $x''*x > x'*x$ folgt $x'' > x'$ bzw. aus $x*x'' = *xx'$ und aus $x''*x = x'*x$ folgt $x'' = x'$ für alle $x, x'\ x'' \in X$, (siehe [5]).

Daraus ergibt sich folgender

Satz 1.2. Die Elemente x'' und e, deren Esixtenz durch die Axiome A_1 und A_2 postuliert sind, sind eindeutig bestimmt.

In einer S-Loop heißt ein Element a *positiv*, wenn $a \geqslant e$, *streng positiv*, wenn $a > e$, und *negativ*, wenn $a \leqslant e$ ist.

Definition 1.4. Die Menge $L = X_+ := \{x | x \geqslant e,\ x \in X\}$ heißt der *positive Kegel* oder *Positivitätsbereich* von X ([3]).

Den positiven Kegel bezeichnen wir hier mit L und nicht wie üblich mit P, um nicht von den Bezeichnungen A. D. Alexandrovs [1] abzuweichen.

Der negative Kegel X_- von X wird gleichfalls als die Menge aller negativen Elemente von X definiert.

Satz 1.3. $(L, *)$ ist eine linke S-Loop.

Definition 1.5. $L^1 \subset L$ ist ein positiver Unterkegel von X, wenn $(L^1, *)$ eine S-Loop ist.

Natürlich existieren solche Unterkegel u.zw. gibt es jene, die durch ein von e verschiedenes positives Element erzeugt werden, d.h. $L^1 = \{x^n | x \in L,\ n \in N_0\}$.

Satz 1.4. Ein positiver Kegel einer S-Loop $(X, *)$, der von einem einzigen Element erzeugt wird, ist eine natürlich angeordnete kommutative Halbgruppe mit Einselement.

Nach L. Fuchs [3] heißt *eine Halbgruppe* $(H, *)$ *natürlich geordnet*, wenn sie positiv geordnet ist (d. h. wenn ihre sämtlichen Elemente positiv sind) und aus $a < b$ die Existenz gewisser $x, y \in H$ mit $a*x = y*a = b$ folgt.

Definition 1.6. Eine linke S-Loop $(X, *)$ heißt *arhimedisch* [3], wenn für jedes $b \in X$ ein $n \in N$ so existiert, daß $a^n > b$ für jedes $a > e$, $a \in X$ bzw. $a^n < b$ für jedes $a < e$, $a \in X$.

Natürlich gibt es auch solche S-Loop, die nichtarhimedisch sind. In Beispiel 1.2 ist eine solche Loop angegeben.

Satz 1.5. Jede arhimedisch linke S-Loop $(X, *)$ ist nicht nach oben beschränkt, falls sie einen nichttrivialen positiven Kegel besitzt bzw. $(X, *)$ ist nicht nach unten beschränkt, falls $(X, *)$ einen nichttrivialen negativen Kegel besitzt.

Definition 1.7. Eine linke S-Loop $(X, *)$ ist vollständig, wenn die Gleichung $x^n = a$ für jedes $n \in N$ wenigstens eine Lösung in X hat, wobei $a \in X$ beliebig ist.

Satz 1.6. Ist $(X, *)$ eine linke vollständige S-Loop, dann hat die Gleichung $x^n = a$ für jedes $n \in N$ eine einzige Lösung in X, wobei $a \in X$.

Die *lineare Ordnung* auf X ist *dicht*, wenn zwischen zwei beliebigen Elementen $a, b \in X$ wenigstens ein $c \in X$ ist, so daß $a < c < b$.

Eine Untermenge Y der geordneten Menge X, nennt man *Anfangsintervall* der Menge X, wenn aus der Beziehung $x \in Y$, folgt daß alle Elemente aus X die x vorangehen auch Elemente von Y sind d.h. aus

$$y \leqslant x \in Y \Rightarrow y \in Y$$

Es sei eine Menge $Z \subset X$ gegeben. Das kleinste Element $a \in X$, das die Bedingung

$$x \in Z \Rightarrow x \leqslant a$$

erfüllt (vorausgesetzt, daß ein solches Element existiert) wird als *kleinste obere Schranke* oder Supremum der Menge Z bezeichnet. Dieses Element bezeichnet man mit sup Z, d.h. sup $Z = a$.

Die *Ordnung auf X heißt stetig*, wenn sie dicht ist und jedes nichtleere von X verschiedene Anfangsintervall ein Supremum besitzt oder wenn alle Schnitte in X Dedekindsche Schnitte sind ([2]).

Schließlich nennen wir eine Untermenge Y der Kette X in X dicht, wenn jedes Intervall der Menge X wenigstens ein Element aus Y enthält.

Satz 1.7. Hat der positive Kegel L einer arhimedisch linken S-Loop $(X, *)$ ein von e verschiedenes erstes Element q, so wird L von q erzeugt. $(L, *)$ ist eine natürlich geordnete kommutative Halbgruppe mit Einselement.

Satz 1.4. besagt nun, daß $(L, *)$ eine natürlich angeordnete kommutative Halbgruppe ist.

Anmerkung 1.1. Hat hingegen der negative Kegel einer arhimedisch linken S-Lpoo $(X, *)$ ein von e verschiedenes erstes Element q, dann muß sie nicht unbedingt von q erzeugt werden. Tatsächlich beweist Beispiel 1.1 diese Vermutung. In Beispiel 1.1. ist $X_- = \{0, -2, -4, -6, \ldots\}$. Es ist leicht ersichtlich, daß es kein $n \in N$ gibt, so daß $(-2)^n = -6$.

Satz 1.8. Ist die Ordnung auf L nicht dicht, so ist $(L, *)$ von einem einzigen Element erzeugt, wobei L der positive Kegel einer arhimedisch linken S-Loop $(X, *)$ ist.

Daraus folgt

Satz 1.9. Jede arhimedisch linke S-Loop $(X, *)$ ist wenigstens auf einer Menge die eine dichte Ordnung hat, definiert, sobald ihr positiver Kegel L nicht von einem Element erzeugt werden kann.

Satz 1.10. Jede linke S-Loop $(X, *)$ in der X eine stetige Ordnung besitzt, ist vollständig.

LITERATURVERZEICHNIS

1. A. D. Alexandrov, A certain generalization of the functional equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Siberian Math J. 11 (1970), 198–209 oder die Originalarbeit in russ. Sprache aus: Sibirsk. Mat. J. 11 (1970), 264–274.
2. P. S. Alexandroff, *Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin (1967).
3. L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems* (in russischer Übersetzung) Moskau 1965.
4. K. Kuratonski, *Topology I* (in russischer Ubersetzung) Moskau 1966.
5. L. Rédei, *Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen*. Leipzig 1963.
6. G. Szász, *Einführung in die Verbandstheorie*, Budapest 1962.
7. J. Täuber, Eine neue Klasse von Lösungen einer Funktionalgleichung. Bul. st. si tehn. Inst. Polit. „Tr. Vuia" Timişoara 16 fasc. 2 (1971)
8. J. Täuber, Uber die Lösungen einer von A. D. Alexandrov verallgemeinerten Cauchyschen Funktionalgleichung Anal. Univ. Timişoara X fasc. 2, 1972.
9. J. Täuber, Contribuţii la solutionarea unor ecuaţii funcţionale Cauchy pe o clasă specială de loopuri slabe. Dissertation 1972, Timişoara.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС СЛАБЫХ ЛУПОВ

(РЕЗЮМЕ)

В настоящей работе рассматриваются некоторые свойства специальногои классса слабых лупов, определенных аксиоматической системой A_1—A_4.

O CLASĂ SPECIALĂ DE LOOPURI SLABE

(REZUMAT)

În lucrarea de faţă se studiază unele proprietăţi ale unei clase speciale de loopuri slabe, definite prin sistemul axiomatic A_1-A_4.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

ASUPRA TRANZIŢIILOR CUANTICE ALE UNOR SISTEME SPECIALE MULTIPLU PERTURBATE

DE

M. BORNEAS, M. DAVID, I. MIRON, M. CRISTEA, I. DAMIAN

Interesul pentru mecanica generalizată [1] , [2] a crescut în ultimul timp [3], [4], [5], [6], [7], [8], abordîndu-se şi cuantificarea ei [9]. În acest context s-a stabilit următoarea ecuaţie cuantică, conţinînd derivate ale coordonatelor :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\sum_j\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_j^2}-\frac{\omega^2\hbar^2}{2}\sum_j\frac{\partial^2\Psi}{\partial\dot{x}_j^2}+U\psi=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{1}$$

cu $j=1, 2, 3$ şi μ masa.

Examinînd problema tranziţiilor cuantice ale unui sistem guvernat de ecuaţia (1) se obţine aceeaşi formă a ecuaţiilor generale, deoarece în acestea nu apare hamiltonianul în mod explicit. Deseobiri vor apare în exprimarea concretă a matricii de perturbaţie. Dacă notăm cu V operatorul de perturbaţie, avem

$$U=U^\circ+V \tag{2}$$

unde U° nu depinde explicit de timp, aşadar hamiltonianul neperturbat

$$H^\circ=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\sum_j\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}-\frac{\omega^2\hbar^2}{2\mu}\sum_j\frac{\partial^2}{\partial\dot{x}_j^2}+U^\circ \tag{3}$$

nu depinde explicit de timp. În acest caz ecuaţia neperturbată

$$H^\circ\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{4}$$

are soluţii de forma

$$\psi(x,\ \dot{x},\ t)=\psi^\circ(x,\ \dot{x})\varphi\ (t) \tag{5}$$

x şi $\dot{x}$ reprezentînd totalitatea coordonatelor, respectiv a derivatelor lor. Ecuaţia (4) poate fi desfăcută în două

$$\frac{i\hbar}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=F \tag{6}$$

și

$$H^{\circ}\psi^{\circ}=F\psi^{\circ} \tag{7}$$

cu F constantă.

Prima are soluții de forma

$$\varphi\sim\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ft\right) \tag{8}$$

iar a doua presupunem că are șirul de soluții ψ_k° corespunzător unui spectru discret și nedegenerat de autovalori F_k. Deoarece acestea sînt autovalorile hamiltonianului generalizat cu derivate superioare, interpretăm pe F drept energie a sistemului generalizat. Cu notația $F\equiv E$ scriem din (5) și (8):

$$\psi_k=\psi_k^{\circ}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_k t\right) \tag{9}$$

iar ecuația de autovalori (7) are forma:

$$H^{\circ}\psi^{\circ}=E\psi^{\circ}. \tag{10}$$

Acum soluția ecuației (1) se poate scrie sub forma cunoscută [10]

$$\Psi(x,\ \dot{x},\ t)=\sum_k c_k(t)\,\psi_k^{\circ}(x,\ \dot{x})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_k t\right). \tag{11}$$

Substituția în ecuația (1) și luarea în considerare a ecuației (10), conduce la

$$\sum_k c_k V\psi_k^{\circ}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_k t\right)=i\hbar\sum_k\frac{dc_k}{dt}\psi_k^{\circ}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_k t\right), \tag{12}$$

ecuația care se deosebește de cea cunoscută din mecanica cuantică prin aceea că ψ_k° sînt funcții nu numai de x_j ci și de derivatele lor $\dot{x}_j$.

Înmulțirea ecuației (12) la stînga cu $\psi_k^{\circ}\exp\frac{i}{\hbar}E_n t$ și integrarea în raport cu toate coordonatele și toate derivatele lor permite să se scrie

$$\sum_k c_k\exp\frac{i}{\hbar}(E_n-E_k)t\int d\tau\,\psi_n^{\circ *}V\psi_k^{\circ}=$$

$$=i\hbar\sum_k\frac{dc_k}{dt}\exp\frac{i}{\hbar}(E_n-E_k)\int d\tau\,\psi_n^{\circ *}\psi_k^{\circ}. \tag{13}$$

Așadar matricea de perturbație este

$$V_{nk}=\int d\tau\,\psi_n^{\circ *}V\psi_k^{\circ}, \tag{14}$$

$d\tau$ fiind elementul de volum în spațiul fazic, ceea ce deosebește expresia matricei (14) de matricea de perturbație din mecanica cuantică obișnuită.

Deoarece H° este hermitic [9] funcțiile ψ_k° sînt ortonormale și obținem din (13) ecuațiile satisfăcute de coeficienții c_n.

$$\frac{dc_n}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\sum_k c_k V_{nk} \exp i\omega_{nk} t \tag{15}$$

cu notația

$$\omega_{nk} = \frac{E_n - E_k}{\hbar}. \tag{16}$$

De aici se află probabilitatea de tranziție a sistemului din starea m în starea n în mod cunoscut [10]:

$$w_{m\to n} = |c_n|^2, \tag{17}$$

coeficienții c_n putînd fi calculați în aproximații succesive.

În cazul interacțiunii unei particule de sarcină e cu lumina, perturbația poate fi luată de forma [10]

$$V = -ex\,\mathcal{E}\cos\omega t \tag{18}$$

deci matricea perturbație este

$$V_{nk} = -e\,x_{nm}\,\mathcal{E}\cos\omega t \tag{19}$$

cu următoarele semnificații: $\mathcal{E}$ amplitudinea componentei electrice a cîmpului electromagnetic, ω frecvența cîmpului, x_{nm} matricea coordonată.

Coeficientul de absorbție a luminii de către un mediu format din sisteme ca mai sus, în cazul cînd nivelele energetice sînt perturbate, se poate deduce din (17), (16) și luarea în considerare a coeficienților lui Einstein, obținîndu-se [11]

$$\alpha_{1\omega} = -\frac{e^2\omega_{nm}}{3\hbar c\,\varepsilon_0}|x_{nm}|^2 N_m\left(1-\frac{N_n}{N_m}\right)\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,|\Omega_{1nm}|^2; \tag{20}$$

aici N_m și N_n sînt numărul de sisteme în unitatea de volum în starea m respectiv n iar $\Omega_{1n\,m}$ este o expresie funcție de exponențiale de frecvențe și energii conform cu notațiile din [11].

Dacă mediul este perturbat de încă un cîmp exterior coeficientul de absorbție se determină ca în [11]

$$\alpha_{2\omega} = \alpha_{1\omega}\frac{6\varepsilon_0 e^2\mathcal{E}^4|x_{pp}|^2\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\left|\int_{t_2}^{t} dt\,\Omega_{1pm}\cos\omega t\right|^2}{-\hbar^2\rho\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,|\Omega_{1pm}|^2}, \tag{21}$$

dar această expresie se deosebește de cea din [11] prin faptul că atît autofuncțiile care intervin, cît și energiile, se calculează din ecuația (10), conținînd și derivatele coordonatelor.

BIBLIOGRAFIE

1. Borneas M., Am. J. Phys., 1959, *27*, p. 265.
2. Borneas M., Phys. Rev., 1969, *186*, p. 1 299.
3. Koestler J. și Smith J., Am. J. Phys., 1965, *33*, p. 140.
4. Hayes C., J. Math. Phys., 1969, *10*, p. 1555.
5. Rodrigues L. și Rodrigues P., Am. J. Phys., 1970, *38*, p. 557.
6. Ryan C., J. Math. Phys., 1972, *13*, p. 283.
7. Riahi F., Am. J. Phys., 1972, *40/3*, p. 386.
8. Tesser H., J. Math. Phys., 1972, *13*, p. 796.
9. Borneas M., Am. J. Phys. , 1972, *40/3*, p. 248.
10. Spolski E. V., *Fizica atomică*, Ed. tehnică, București 1953 vol. II.
11. Borneas M., David M., Miron I., Bul. St. Tehn. I. P. T., mat.-fiz.-mec., 1973, *18* (32), fasc. 1.

В СВЯЗИ С КВАНТОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ МНОГОЧИСЛЕННО ПЕРТУРБИРОВАННЫХ

(РЕЗЮМЕ)

Рассматриваются квантовые переходы некоторых систем из общей квантифицированной механики, при помощи квантового уравнения с вышими производными координат.

Указывается на то, что возможности перехода получаются аналогичными с таковыми в случае квантовой обыкновенной механики однако в формулах появляются самофункции и самозначения обобщенного гамильтоньяна.

ON THE QUANTUM TRANSITIONS OF SOME SPECIAL SYSTEMS PERTURBED BY MULTIPLE PERTURBATIONS

(SUMMARY)

The quantum transitions of some systems are examined, within the quantized generalized mechanics, with the help of the quantum equation with higher derivatives of the coordinates. It is shown that the transition probabilities can be obtained in the same way as with the ordinary quantum mechanics, but the eigenfunctions and the eigenvalues of the generalized hamiltonian enter the formulae.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

ASPECTE DE HISTEREZĂ ALE CÎMPULUI CRITIC LA PĂTURI DE Ni–Co TORSIONATE ALTERNANT.

DE

COLETA DE SABATA, C. MARCU

A. INTRODUCERE.

Lucrări anterioare [1], [2], [3], [4], grupează rezultatele unui studiu sistematic al aliajului electrolitic de 97% Ni şi 3% Co, depus în pături relativ groase, din punct de vedere al modificărilor proprietăţilor magnetice prin tratamente mecanice sau magnetice.

În lucrarea de faţă ne-am propus să studiem aspectele de histereză în valorile cîmpului critic H_{cr} şi ale factorului de remanenţă $J_{\parallel}/J_s$ ca funcţie de deformaţiile de torsiune statică aplicate astfel încît să formeze un ciclu alternant.

B. CONDIŢII EXPERIMENTALE.

Probele au formă cilindrică cu $\varnothing = 0{,}1$ cm şi $l = 33$ cm, grosimea păturii fiind de 6 μm. Aliajul electrolitic a fost depus pe fire de cupru din baia indicată în [4], condiţiile asigurînd conţinutul de 3% Co şi restul Ni.

Instalaţia experimentală permite să se obţină simultan, pe ecranul unui osciloscop, forma t.e.m. indusă într-o bobină sondă ce înconjoară proba, datorită magnetizării ei alternative la frecvenţa de 50 Hz, precum şi ciclul de histereză corespunzător obţinut cu ajutorul unui integrator electronic. În cazul păturilor feromagnetice remagnetizarea la frecvenţa de 50 Hz poate fi considerată un regim cuasistatic [7]. Cuplul de torsiune a fost aplicat din 30° în 30°la un capăt al probei, celălalt capăt fiind fixat. Dispozitivul experimental este descris în [5].

În figura 1 este redat aspectul ciclului de histereză şi al formei t.e.m. induse pentru o probă de Ni–Co nedeformată mecanic.

Din punct de vedere al studiului întreprins, interesează situaţiile în care, în medie, se face trecerea vectorilor de magnetizare spontană J_s de la legătura cu cîmpul magnetizant H (de la saturaţie), la legătura cu axa medie de uşoară magnetizare a probei (spre remanenţă). Valoarea cîmpului magnetic pentru care se realizează această trecere am numit-o cîmp critic H_{cr} şi ea este marcată printr-o variaţie bruscă pe curba t.e.m. induse (punctul B din fig. 1).

Informaţii interesante aduce, de asemenea, evoluţia factorului de remanenţă în dependenţă de solicitarea aplicată.

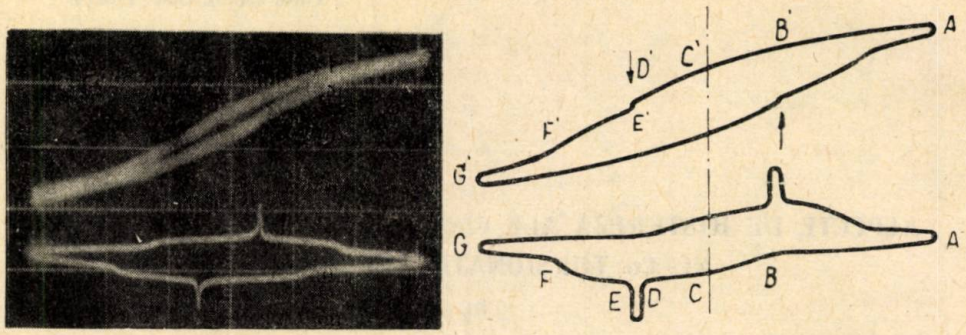


Fig. 1.: Ciclul de histereză și t.e.m. indusă pentru o probă nedeformată mecanic.

C. REZULTATE EXPERIMENTALE

Figura 2 prezintă evoluția curbelor din fig.1 la aplicarea unui cuplu de torsiune crescător (2, *a*, *b*) și descrescător (2, *c*, *d*).

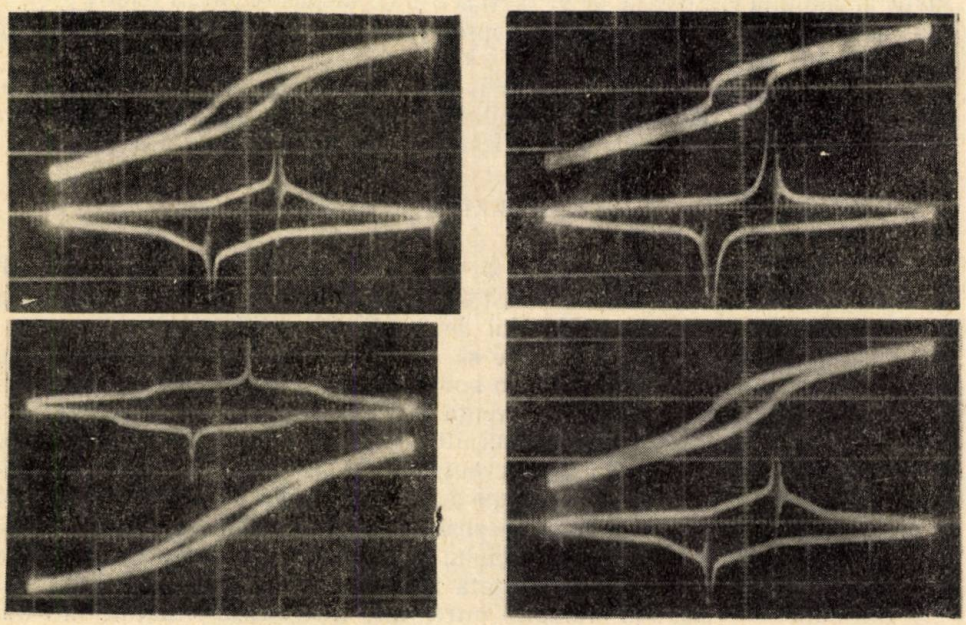


Fig. 2.: Evoluția curbelor din fig. 1 la aplicarea unui cuplu de torsiune crescător (*a*, *b*) și descrescător (*c*, *d*).

Din seria de oscilograme obținute prin torsionarea statică între $0°-420°$ căreia îi corespund torsionările specifice $\theta=0\sim12{,}7°/cm$, respectiv lunecările specifice $\gamma=0\sim0{,}635°$ s-a determinat valoarea cîmpului critic redus H_{cr}/H_s, rezultatele fiind sintetizate în fig. 3.

Curba arată scăderea valorii cîmpului critic redus cu creşterea unghiului de torsiune, pînă la valori negative ale lui, cu tendinţa de a se apropia de cîmpul coercitiv. La reducerea solicitării, cîmpul critic creşte pînă la situaţiile de torsiune cu 60°, dar valorile ce corespund unei anumite torsionări sînt superioare faţă de cele avute la încărcare, apărînd astfel un aspect de histereză. Efortul unitar ce corespunde unghiului de 60° este de cca. $1{,}2 \cdot 10^8$ N/m² şi joacă acelaşi rol în procesele de solicitări prin cicluri alternante ca şi cîmpul coercitiv în procesele de remagnetizare.

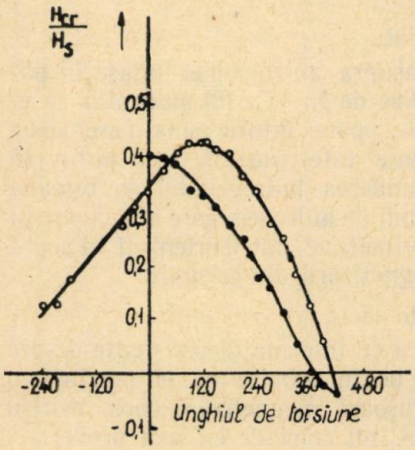


Fig. 3.: Evoluţia cîmpului critic redus H_{cr}/H_s cu solicitarea de torsiune.

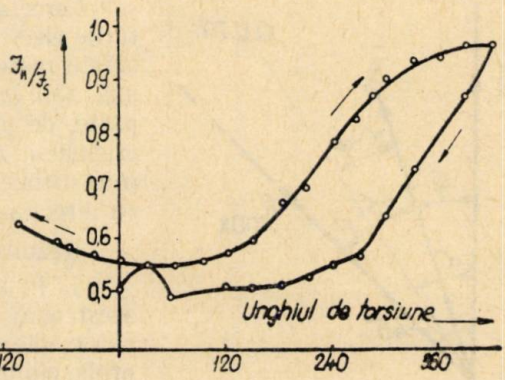


Fig. 4.: Evoluţia factorului de remanenţă $J_{\parallel}/J_s$ cu solicitarea de torsiune.

Este de remarcat de asemenea faptul că valoarea cîmpului critic trece printr-un maxim ce depăşeşte valoarea sa iniţială fapt ce poate fi atribuit reducerii tensiunilor interne de compresiune ca urmare a deformaţiilor plastice de torsiune suferită de aliaj. De altfel eforturile ce apar în material la solicitarea maximă aplicată se apropie sensibil de limita de rupere a materialului ($5 \cdot 10^8$N/m²).

În figura 4 prezentăm evoluţia factorului de remanenţă cu unghiul de torsiune.

Curba obţinută din determinările experimentale arată că în domeniul elastic variaţia este asemănătoare cu cea a păturilor de nichel electrolitic [6] dar mult mai puţin pronunţată. Faptul indică o stabilitate mai mare a proprietăţilor magnetice ale aliajului în raport cu deformaţiile elastice, calitate importantă în unele aplicaţii practice. Aspectul de histereză a valorilor lui $J_{\parallel}/J_s$ se manifestă şi aici : în plus, există o plajă destul de largă de valori pentru care raportul este inferior celui pentru proba nesolicitată la torsiune.

D. CONSIDERAȚII TEORETICE.

Fie un domeniu de magnetizare spontană conținut în pătură (fig. 5) pentru care am notat prin :

a.u.m. : axa de ușoară magnetizare precizată prin unghiul α în raportcu axa probei ;

$\overline{J_s}$: vectorul magnetizării spontane precizat prin unghiul φ ;

σ_{max} : solicitarea maximă ce apare în probă la torsiune ; ea face unghiul de 45° față de axa probei [9] și este determinată de momentul de torsiune $\overline{M_t}$;

$\overline{H}$: cîmpul magnetizant aplicat axial.

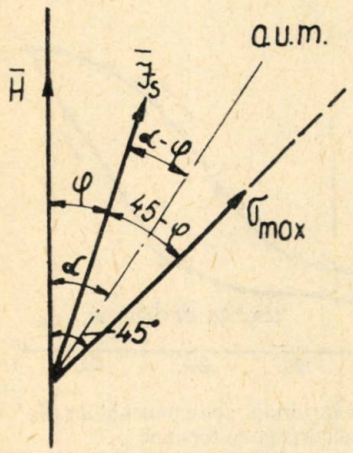


Fig. 5.: Mărimi caracteristice unui domeiniu de magnetizare spontană

Cercetări asupra anizotropiei induse în păturile electrolitice de Ni—Co [8] au arătat că la aceste materiale apare întotdeauna o asemenea axă (*a.u.m*) care este cauzată, cel puțin în parte, de pătrunderea hidrogenului în rețeaua cristalină. Atomii de hidrogen, care ocupă poziții interstițiale nesimetrice, pot fi orientați în acord cu direcția magnetizării din cristalit.

Rezultă de aici :

1. în acord cu informațiile existente despre acest aliaj, se poate admite că el prezintă o axă medie de ușoară magnetizare care, pentru probe cilindrice, nu coincide cu axa probei ;

2. posibilitatea existenței unor orientări ale vectorilor de magnetizare spontană cu o dispersie destul de însemnată, față de axa medie.

Aplicarea solicitării de torsiune face să apară o direcție preferențială, dată de σ_{max}, la 45° în raport cu axa probei.

În această situație, în analiza pe care o vom face, vom putea separa domeniile de magnetizare spontană în două categorii : cele pentru care $\varphi<45°$ și cele pentru care $\varphi>45°$, unde φ este unghiul ce corespunde minimului de energie. Așa cum vom vedea, se pare că ultimile sînt răspunzătoare pentru aspectele histeretice evidențiate experimental.

Energia liberă a unității de volum pentru domenii Weiss caracterizate cu ajutorul mărimilor indicate mai sus, în aproximația unei constante aditive, va fi dată în principal de următorii termeni :

— energia de anizotropie cristalină, pentru proba de Ni—Co ce posedă o axă de ușoară magnetizare apărută în procesul de formare a păturii, are expresia [7] :

$$W_u = K_u \cdot \sin^2(\alpha - \varphi)$$

— energia magnetostatică :

$$W_m = -(\overline{J_s} \cdot \overline{H}) = -J_s \cdot H \cdot \cos\varphi$$

– energia magnetoelastică:

$$W_{me} = -\frac{3}{2} \cdot \lambda_s \sigma_{max} \cdot \cos^2 (45 - \varphi).$$

În cazul nostru $\lambda_s < 0$ și $\sigma_{max} > 0$ prin urmare:

$$W_{me} = \frac{3}{2} |\lambda_s| \cdot \sigma_{max} \cdot \cos^2 (45 - \varphi)$$

Cu acestea se obține:

$$W(\alpha, \varphi) = K_u \cdot \sin^2 (\alpha - \varphi) - J_s \cdot H \cdot \cos \varphi + \frac{3}{2} |\lambda_s| \cdot \sigma_{max} \cdot \cos^2 (45 - \varphi) \quad (1)$$

Condiția de stabilitate a poziției vectorului $\overline{J_s}$ va fi dată de

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} > 0 \quad (2)$$

dar pe noi ne interesează, în cele ce urmează, situațiile în care se produce trecerea vectorului $\overline{J_s}$ de la legătura cu cîmpul $\overline{H}$ la direcția axei de ușoară magnetizare, valoare a cîmpului magnetizant pe care am notat-o prin H_{cr}. Ea se obține din:

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3)$$

Aplicînd relației (1) condițiile (3) vom avea:

$$H_{cr(\tau)} = -\frac{2K_u}{J_s} \cdot \frac{\cos 2 (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} + \frac{3 |\lambda_s| \sigma_{max}}{J_s} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\cos \varphi} \quad (4)$$

iar pentru torsiunea nulă:

$$H_{cr(0)} = -\frac{2K_u}{J_s} \cdot \frac{\cos 2 (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \quad (5)$$

cîmpul critic redus va fi dat prin:

$$\frac{H_{cr(\tau)}}{H_{cr(0)}} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{|\lambda_s|}{K_u} \cdot \sigma_{max} \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2 (\alpha - \varphi)} \cdot \quad (6)$$

Expresia (6) ne arată că pe măsură ce solicitarea crește, valoarea cîmpului critic se micșorează, rezultat în acord cu experiența. Relația (6) permite de asemenea să se înțeleagă mecanismul care face ca la reducerea torsionării cîmpul critic să nu mai revină pe vechile valori ci să aibă valori superioare pentru fiecare unghi de torsiune. Torsionările aplicate materialului l-au adus în zona deformațiilor plastice ($\sigma \leqslant 5 \cdot 10^8$ N/m^2) zonă în care pentru realizarea unei anumite deformații specifice $\Delta\varepsilon$ sînt necesare eforturi diferite la încărcare respectiv la descărcare [9], figura 6.

În adevăr, în această zonă $\Delta\sigma_i < \Delta_d\sigma$ deoarece, în acord cu teorema descărcării, în domeniul deformațiilor plastice revenirea se face pe o dreaptă deplasată spre valori mai mari ale deformației specifice, în raport cu curba inițială.

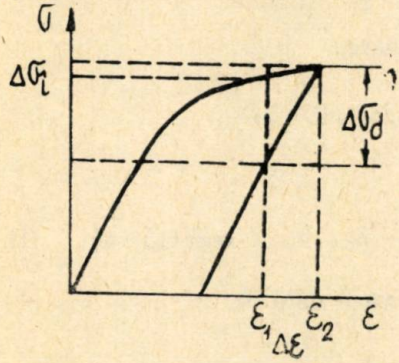


Fig. 6.: Dependența între solicitare și deformația materialului în domeniul plastic.

Folosind valorile indicate în fig. 6 vom putea rescrie expresia (6) pentru încărcarea ($\Delta\sigma_i$) și descărcare ($\Delta\sigma_d$) în formele:

$$\frac{H_{cr(\tau)}}{H_{cr(0)}} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{|\lambda_s|}{|K_u|} \times$$

$$\times (\sigma_{max(1)} + \Delta\sigma_i) \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2(\alpha - \varphi)} \qquad (6a)$$

$$\frac{H_{cr(\tau)}}{H_{cr(0)}} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{|\lambda_s|}{|K_u|} \times$$

$$\times (\sigma_{max(1)} + \Delta\sigma_i - \Delta\sigma_d) \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2(\alpha - \varphi)} \qquad (6\,b)$$

în care evident $\Delta\sigma_i < \Delta\sigma_d$.

Din (6 a) și (6 b) rezultă că pentru o anumită deformație specifică $\Delta\varepsilon$ în domeniul plastic, eforturile unitare necesare realizării ei sînt mai mari la descărcare iar cîmpul critic corespunzător va varia în sens opus (fig. 3).

Maximul prin care trece cîmpul critic la descărcare corespunde deformației pentru care eforturile devin nule. Valoarea lui depășește valoarea cîmpului critic redus al probei netorsionate; credem că explicația constă în modificarea sensului tensiunilor interne de compresiune, apărute inițial în procesul de galvanizare, sub efectul deformațiilor în domeniul plastic.

Factorul de remanență definit prin $J_\parallel / J_s$ permite obținerea de informații asupra orientării medii a vectorilor de magnetizare spontană atunci cînd cîmpul magnetizant trece prin valoarea zero [5].

Avînd în vedere acest fapt, relația (1) devine:

$$W(\alpha, \varphi, \sigma, H)_{H=0} = -\frac{3}{2} \cdot \lambda_s \cdot \sigma_{max} \cdot \cos^2 (45 - \alpha)$$

pentru că la $H=0$ și $\alpha - \varphi = 0$. Vom avea:

$$W(\alpha, \sigma) = \frac{3}{2} |\lambda_s| \cdot \sigma_{max} \cdot \cos^2 (45 - \alpha) \qquad (7)$$

Relația (7) indică pe de o parte creșterea energiei libere odată cu creșterea solicitării de torsiune dar, pe de altă parte, ea depinde esențial de unghiul α dintre *a.u.m.* și axa geometrică a probei. Pe măsură ce *a.u.m.* se apropie de axa probei, energia internă scade. Cu alte cuvinte, micșorarea unghiului α sub acțiunea solicitării de torsiune este un proces energetic avantajos pentru aliajul Ni–Co. Din figura 7 se vede că acest proces este deosebit de intens în domeniul deformațiilor plastice cînd unghiul α are valoarea medie de cca. 15°.

Schimbarea de sens a variației raportului J_{II}/J_s și evoluția lui în procesul de descărcare se justifică analog cazului precedent.

Ne-am propus în continuare să studiem variația energiei libere cu solicitarea de torsiune în două situații limită: la saturația magnetică a probei și la remanență.

Plecînd de la relația (1) am introdus o funcție:

$$f = \frac{W(\alpha, \varphi)}{K_u} \tag{8}$$

dată prin:

$$f = \sin^2(\alpha - \varphi) - n \cdot \cos\varphi + a \cdot \cos^2(45 - \alpha) \tag{9}$$

în care:

$n = \frac{J_s \cdot H}{K_u}$ este un factor a cărui valoare este determinată esențial de intensitatea cîmpului magnetizant,

$a = \frac{3}{2} \cdot \frac{|\lambda_s|}{K_u} \cdot \sigma_{max}$ — un factor a cărui valoare depinde de solicitarea din probă.

Am ales drept valori pentru acești factori:

$n=0$ cîmp magnetizant nul,

$n=2$; $(J_s \cdot H)$ preponderent în raport cu K_u ceea ce corespunde saturației, iar pentru a: 0, 0,5, 1, 1,5 și 2 adică s-a plecat de la solicitarea nulă și s-a ajuns la solicitări din domeniul plastic.

Întrucît direcția axei de ușoară magnetizare nu este cunoscută dinainte am ales al treilea parametru unghiul α cu valori posibile: 15°, 30°, 45° și 60°.

În funcție de toate elementele enumerate mai sus s-a calculat variația funcției f de energie liberă în dependență de valori posibile ale unghiului φ pentru a se putea determina în acest fel pozițiile vectorilor $\overline{J_s}$ care fac funcția de energie liberă minimă.

Rezultatele obținute cu ajutorul unui calculator electronic, sînt concentrate în figura 7 și figura 8.

Din analiza curbelor rezultă:

— pentru $n=2$ (saturația magnetică a probei) există o plajă destul de largă a orientărilor posibile pentru vectorii $\overline{J_s}$, indiferent de poziția axei de ușoară magnetizare (α), dacă solicitarea este nulă.

Pe măsură ce solicitarea crește direcția de minimum tinde spre $\varphi=0$ dar domenii caracterizate prin orientări α diferite necesită energii diferite pentru a ajunge la $\varphi \to 0°$.

O situație interesantă se relevă pentru domenii avînd vectorii $\overline{J_s}$ orientați sub unghiuri $\alpha > 45°$ pentru care se formează minime de energie, îngrădite de maxime importante, la unghiuri φ de 50°, 30°~40° și 20° pe măsură ce solicitarea crește. Așa cum am mai sesizat [1], [2], [3] în probă există domenii cu $\alpha > 45°$ care se lasă foarte greu aduse spre direcția cîmpului magnetic $\overline{H}$.

În cazul remanenței ($n=0$) creșterea solicitării mărește energia înmagazinată în feromagnetic dar comportarea domeniilor este și aici determinată de

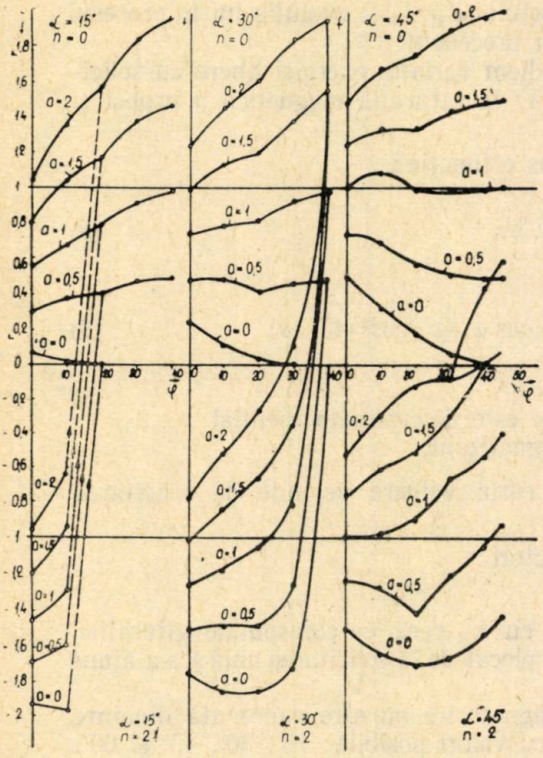


Fig. 7. Funcția f de energie liberă pentru domenii cu $\alpha \leqslant 45°$.

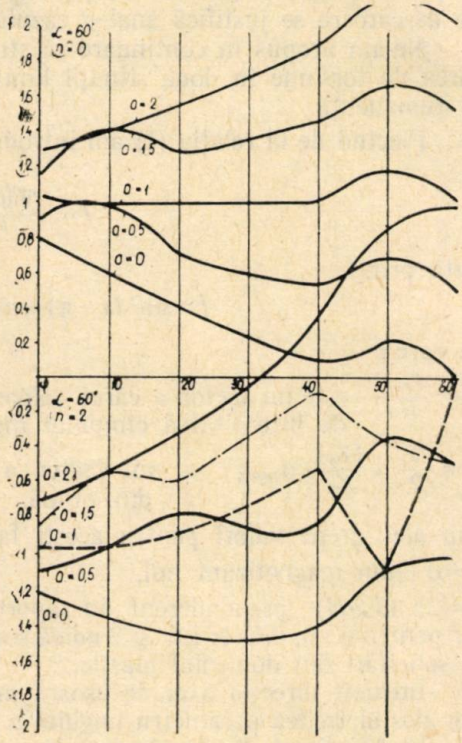


Fig. 8. Funcția f de energie liberă pentru domenii cu $\alpha > 45°$.

orientările proprii ale vectorilor $\overline{J_s}$. În absența solicitării sau la solicitări mici, pentru domeniile având $\alpha \leqslant 45°$, pozițiile de minim se situează pe o plajă largă de valori. Domeniile având $\alpha > 45°$ prezintă minime îngrădite de maxim relativ mari iar unghiul $\varphi \cong 45°$.

La creșterea solicitării valoarea unghiului $\varphi \to 0$ dar minimile de energie se situează la nivele tot mai înalte. Factorul de remanență va crește, așa cum se vede din curba experimentală (fig. 4) dar energia înmagazinată fiind tot mai mare, la descărcare materialul va încerca să scape de surplusul energetic și J_{11}/J_s va fi mai redus.

E. DISCUȚII ȘI CONCLUZII

Din informațiile existente asupra aliajului electrolitic de Ni–Co se poate admite că el prezintă o axă medie de ușoară magnetizare care nu coincide c axa probei cilindrice dar în același timp vectorii de magnetizare sponta ă

au o dispersie pronunțată cauzată, cel puțin în parte, de prezența hidrogenului în rețea [8].

Aplicarea solicitării de torsiune face să mai apară o direcție preferențială la 45° în raport cu axa probei.

În această situație putem separa domeniile de magnetizare spontană în două categorii după cum vectorii $\overline{J_s}$ care le caracterizează fac unghiuri $\alpha \gtrless 45°$ în raport cu axa cilindrului.

Domeniile pentru care $\alpha < 45°$ sînt antrenate ușor de cîmpul magnetic axial, prezența lui nu modifică prea mult orientările dar energia înmagazinată în sistem crește cu $\overline{H}$.

Domeniile cu $\alpha \geqslant 45°$ au comportări mai deosebite :

– prezintă dispersie mare,

– prezintă minime de energie pentru unghiuri mari (40°, 50°) mărginite de maxime importante care fixează vectorii $\overline{J_s}$.

În aceste cazuri, așa cum se vede din curbele de energie, solicitarea și cîmpul conlucrează complex și aspectele histeretice pot fi atribuite, în principal, acestor domenii.

BIBLIOGRAFIE

1. De Sabata C., Mihalca I., Mihailovici D., Marcu C., Rev. Roum. de Phys., București, RSR, 1972, T 17, No. 5, p. 553–564.
2. De Sabata C., Marcu C., Stud. și Cercet. de Fiz., București, RSR, 1971, T 23 No. 10, p. 1155–1162.
3. De Sabata C., Marcu C., Stud. și Cercet. de Fiz., București, R.S.R., 1972, T 24 No. 8, p. 945–949.
4. Munteanu A., Schiff A., Marcu C., Rev. Roum. de Phys., București, RSR, 1970, T 15 No. 2, p. 207–211
5. Marcu C., „Studiul. mecanismului de colaborare a anizotropiei magnetocristaline cu anizotropia magnetoelastică la nichel", Teză, Universitatea din Timișoara, 1971.
6. Lamoth P., Marcu C., Z. Angew. Phys. RFG, 1971, T 32, No. 3, p. 191–196.
7. Andrä W., *„Kvazistaticescoe peremagnicivanie"*, Tonkie feromagnitnîie plenki Ed. Mir Moscova, URSS, 1964, p. 159–210
8. Andrä W., Steenbeck K., Phys. Stat. Sol., RDG, 1966, T 17, p. 191–195.
9. Dicter Jr .G. E., *Metalurgia mecanică*, Ed. Tehn., București, RSR, 1970, p. 509.

ВИДЫ ГИСТЕРЕЗИСА КРИТИЧЕСКОГО ПОЛЯ У ПЕРЕМЕННО СКРУЧЕННЫХ СЛОЕВ

(РЕЗЮМЕ)

Исследуется влияние статического скручивания примененного для значений деформации составляющей переменный цикл, на критическое поле в котором происходит в процессе перемагничивания, переход векторов самопроизвольной магнетизации с направления поля H в направлении легкой магнетизации образца.

Преседуется также изменение остаточного коэффициента в одинамовых условиях, выявляя связь между позицией легкой оси и значением и направлением нагрузки.

Экспреиментальные результаты обрабарываются теоретически терно-динамическаим способом.

DES ASPETS D'HYSTERÈSE DU CHAMP CRITIQUE DANS LES COUCHES DE Ni–Co EN TORSION ALTERNANTE

(RÉSUMÉ)

On a étudié l'influence de la torsion statique – appliquée de manière que la déformation forme un cycle alternant – sur le champ critique H_{cr}, valeur de H pour laquelle se produit le passage des vecteurs J_s vers l'axe de faible aimantation, dans le processus de réaimantation du matériel.

On a poursuivi en même temps l'évoultion du facteur de rémanence dans des conditions identiques, en mettant en évidence la liaison entre la position de l'axe de faible magnétisation et le sens de la déformation mécanique.

Les résultats expérimentaux sont encadrés théoriquement à l'aide des méthodes utilisées par la thermodynamique.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

COLABORAREA TRATAMENTELOR MAGNETICE ŞI TERMICE LA MODIFICAREA PROPRIETĂŢILOR MAGNETICE ALE PĂTURILOR DE Ni—Co

DE

COLETA DE SABATA, C. MARCU, DOROTHEA MIHAILOVICI

A. INTRODUCERE

În cadrul studiului sistematic al păturilor electrolitice de Ni—Co depuse pe suport de cupru, ale cărui rezultate au fost prezentate în lucrările [1], [2], [3], [4], [5], ne-am propus să urmărim de data aceasta conlucrarea între cîmpul magnetic aplicat pe durata electrolizei şi tratamentul termic aplicat ulterior, la modificarea parametrilor magnetici care caracterizează aliajul de Ni—Co.

Păturile de Ni—Co s-au obţinut prin depunerea simultană a componentelor pe plăci dreptunghiulare din cupru din baia indicată în [4] care asigură un raport al componentelor de 3% Co şi 97% Ni. Grosimea stratului a fost de 6 μm.

Proprietăţile magnetice au fost studiate cu ajutorul unei instalaţii care permitea obţinerea pe ecranul osciloscopului a ciclului de histereză ridicat în c.a. la $f=50$ Hz, obţinut cu un integrator electronic.

În fig. 1 este redată o asemenea curbă (*a*) şi schiţa ei (*b*), cu indicarea poziţiilor importante în studiu.

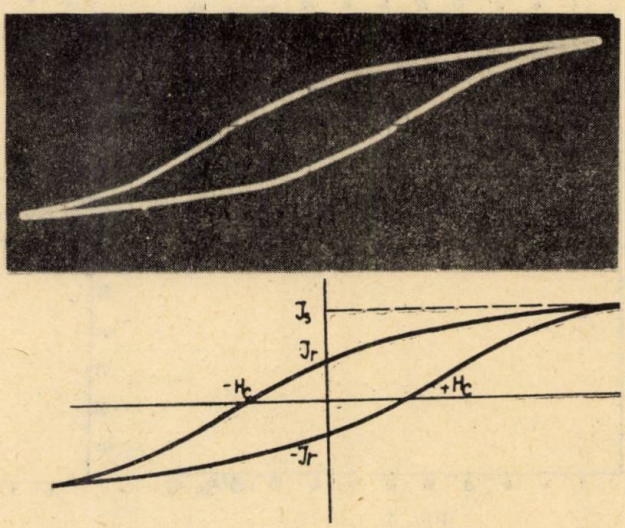


Fig. 1 *a* şi *b*

B. REZULTATE EXPERIMENTALE

Probele au fost realizate în prezența unui cîmp magnetic continuu aplicat paralel suprafeței păturii ; valorile intensității s-au extins între 0 – 18 000 A/m.

După efectuarea măsurătorilor, probele au fost supuse la trei tratamente termice succesive :

*TT*1 la temperatura de 185 °C timp de 2 ore
*TT*2 la temeperatura de 290 °C timp de 2 ore
*TT*3 la temperatura de 290 °C timp de 8 ore

după fiecare tratament repetîndu-se aceleași măsurători.

Rezultatele sînt cuprinse în fig. 2, 3, 4 și 5.

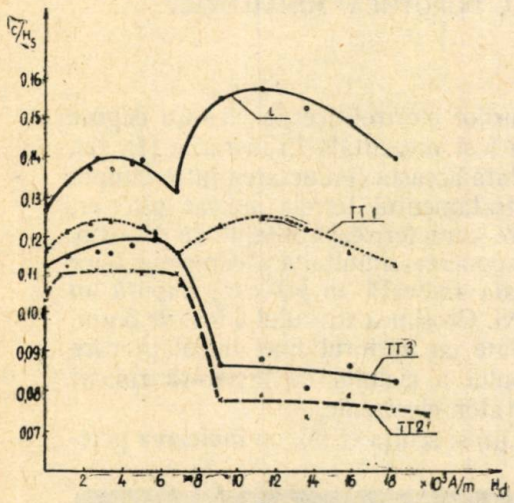


Fig. 2.

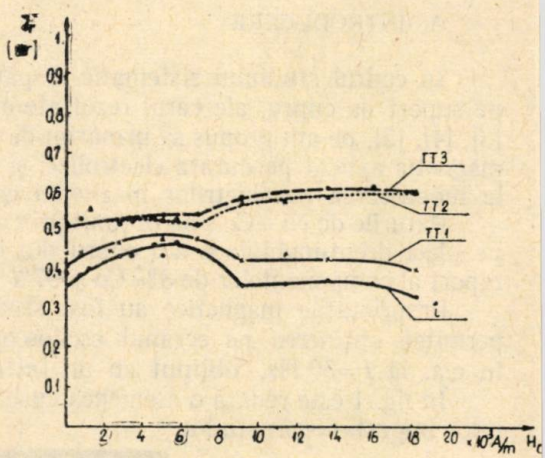


Fig. 3.

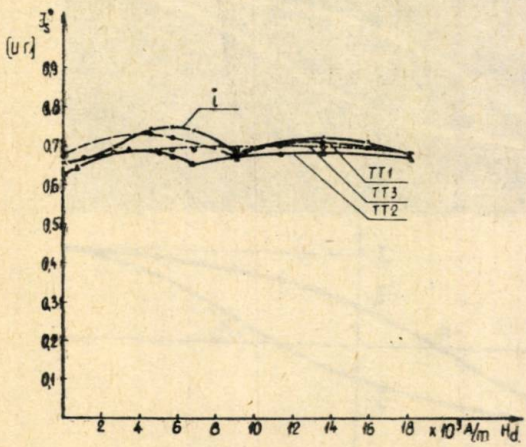


Fig. 4.

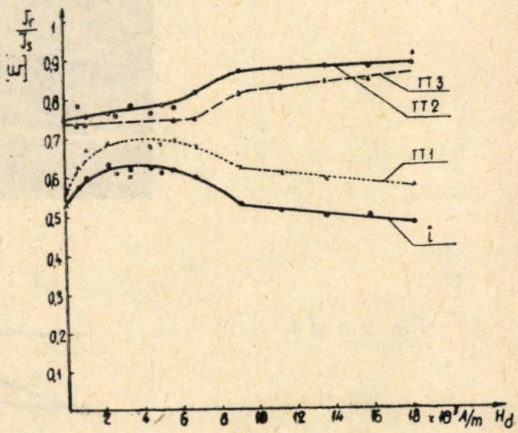


Fig. 5.

C. CONSIDERAȚII ASUPRA REZULTATELOR EXPERIMENTALE

În fig. 2 este redată dependența cîmpului coercitiv redus H_c/H_s de valoarea cîmpului magnetic H_d aplicat pe durata electrolizei (curba *i*).

Se remarcă modificarea cîmpului coercitiv redus cu maximum 23% dar dependența nu este continuă ci prezintă maxime și minime.

Tratamentele termice aplicate modifică esențial valorile cîmpului coercitiv al păturilor realizate în cîmpuri magnetice intense (peste 10^4 A/m) reducîndu-le la jumătate din valoarea inițială.

Efectul este determinat de ordonarea rețelei prin migrarea defectelor, eliminarea hidrogenului oclus și reducerea tuturor tensiunilor interne datorită tratamentului termic urmat de răcirea lentă a probelor. Ușoara creștere care se remarcă între *TT*2 și *TT*3 este urmarea dilatării diferențiale între pătură și suport care, la durata mare a acestui tratament, face ca suportul să influențeze puternic pătura, mult mai subțire, și să determine apariția unor tensiuni interne ordonate.

În fig. 3 este redată dependența între intensitatea de magnetizare remanentă $\vec{J}_r^*$ a unității de masă de substanță Ni—Co în funcție de cîmpul magnetic de la depunere și avînd drept parametru tratamentele termice menționate anterior.

Influența cîmpului magnetic este mult mai puțin însemnată iar efectul tratamentelor termice constă în uniformizarea proprietăților magnetice ale diferitelor probe cu o ușoară tendință de creștere a alinierii momentelor magnetice elementare pe măsură ce tratamentul termic este mai intens.

În fig. 4 este redată dependența intensității de magnetizare de saturație $\vec{J}_s^*$ pentru unitatea de masă în funcție de parametrii arătați anterior.

Fenomenele de saturație nefiind în general influențate de defectele rețelei cristaline ci reflectînd o proprietate intrinsecă a tipului de atom feromagnetic considerat, nu depind nici de cîmpul de la depunere și nici de tratamentul termic aplicat.

Importanță deosebită prezintă curbele din fig. 5 întrucît J_r/J_s este o măsură a rectangularității ciclului de histerezis al substanței feromagnetice.

Colaborarea între cîmpul magnetic de la depunere H_d și tratamentele termice la temperaturi sub 300 °C are drept efect creșterea raportului J_r/J_s de la 0,5 la 0,9 pentru *TT*2 și $H_d = 1{,}8 \cdot 10^4$ A/m.

Coroborînd acest rezultat cu cel din fig. 2 se pot menționa următoarele tipuri de proprietăți magnetice induse în păturile de Ni—Co obținute electrolitic:

1°. materialele cu cicluri de histerezis rectangulare și înguste — deci cu pierderi mici la remagnetizarea în c.a. — se pot realiza prin depunere electrolitică în cîmpuri magnetice cu intensitatea mai mare de 10^4 A/m urmate de un tratament termic de 2 ore la 290 °C cu răcire lentă.

2°. cîmpuri coercitive ridicate se obţin pentru pături de Ni—Co depuse în $H_d=(10-12)\ 10^3$ A/m şi netratate termic. Acestei zone îi corespunde o remanenţă scăzută şi înclinare pronunţată a ciclului de histereză, prin urmare o proporţionalitate destul de convenabilă între intensitatea de magnetizare şi cîmpul magnetic.

Colaborarea între cîmpul magnetic exterior şi tratamentul termic este de natură să permită inducerea proprietăţilor necesare în aplicaţiile practice. Cercetarea efectuată indică domeniile de cîmp şi temperatură prin care se pot realiza variate tipuri de histereze, după necesităţi.

BIBLIOGRAFIE

1. De Sabata C., Mihalca I., Mihailovici D., Marcu C., Rev Roum. de Phys., Bucureşti, RSR 1972 T 17, No 5 p. 553—564.
2. De Sabata C., Marcu C., Stud. şi Cercet. de Fiz. Bucureşti, RSR, 1971 T 23 No 10 p. 1155— 1162.
3. De Sabata C., Marcu C., Stud. şi Cercet. de Fiz. Bucureşti, RSR, 1972 T 24 No 8 p. 945—949.
4. Munteanu A., Schiff A., Marcu C., Rev. Roum. de Phys., Bucureşti RSR, 1970 T 15 No 2 p. 207—211.
5. De Sabata C., Marcu C., Rev. Roum. de Phys., Bucureşti, RSR 1973 T 18 No 9 p. 1057—1064.

СОТРУДНИЧЕСТВО МАГНИТНЫХ И ТЕПЛОВЫХ ОБРАБОТОК ПРИ ИЗМЕНЕНИИ МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ СЛОЕВ

(РЕЗЮМЕ)

В работе определяются условия плавки последующей и термообработки необходимые осуществлению электролитических слоев с разными магнитными свойствами.

Сотрудничество между магнитным полем применённым в электролизе и последующими обработками ведут к получению некоторых слоев имеющих :

— циклы гистерезиса прямоугольные и узкие ;

— значительные коэрцитивные поля и малые остатки ;

— хорошую пропорциональность между $\overline{B}$ и $\overline{H}$ при широком диапазоне значений.

DIE VERÄNDERUNGEN DER MAGNETISCHEN EIGENSCHAFTEN DER Ni—Co-SCHICHTEN DURCH DIE ZUSAMMENARBEIT ZWISCHEN DEN MAGNETISCHEN UND THERMISCHEN BEHANDLUNGEN

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der vorliegenden Arbeit wurden die Herstellungsbedingungen und die darauffolgenden thermische Behandlungen der elektrolytisch niedergeschlagenen Ni—Co-Schichten, die verschiedene magnetische Eigenschaften aufweisen, untersucht.

Die Zusammenarbeit zwischen dem angewendeten Magnetfeld während der Elektrolyse und den nachträglichen Behandlungen führen zu Schichten die folgende Eigenschaften:

– eine rektanguläre und schmale Hysteresisschleife;

– grosse Koerzitivkraft und kleine Remanenz;

– eine gute Proportionalität zwischen $\overline{B}$ und $\overline{H}$ in einem grossen Wertenbereich, besitzen.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA OBŢINERII UNOR ALIAJE DE NICHEL CU METALE FERO ŞI PARAMAGNETICE

DE

AURICA MUNTEANU, C. MARCU, RADA BAEA, DOROTHEA MIHAILOVICI

INTRODUCERE

Problema depunerii simultane prin electroliză a două metale pe acelaşi material a fost cercetată încă de mult la aliaje de nichel cu componenţi feromagnetici [1], [2] şi mai recent cu componenţi paramagnetici [2].

Aceste acoperiri prezintă importanţă practică deoarece pot fi întrebuinţate în scopuri anticorozive şi decorative, la care se adaugă comportarea lor din punct de vedere magnetic, manifestînd proprietăţi specifice.

În lucrare sînt prezentate cîteva aspecte ale optimizării condiţiilor de aliere a nichelului cu fierul, cobaltul şi manganul.

Sistemele binare Ni–Fe şi Ni–Co s-au arătat a fi o alegere avantajoasă din două motive:

– potenţialele standard ale acestor metale sînt apropiate (Ni–0,25 V; Co–0,27 V; Fe–0,44 V),

– condiţiile de depunere sînt aceleaşi ca pentru metalele pure cu un domeniu larg de compoziţie uşor controlabilă.

I. ALIAJE Fe–Ni

Existenţa impurităţilor de fier în băile de nichel a fost pe vremuri considerată dăunătoare calităţii păturilor de nichel depuse. Posibilitatea realizării în condiţii nu prea dificile a aliajelor Fe–Ni, ţinînd cont de unele merite potenţiale ale fierului a deschis calea obţinerii depozitelor de Fe–Ni. Totuşi o perioadă destul de îndelungată aceste aliaje nu au avut aplicaţie practică efectivă, din cauza calităţilor insuficiente sub aspectul proprietăţilor mecanice.

Electrodepunerile de Fe–Ni în scopul utilizării lor ca materiale magnetice sînt mult mai recente [2], [3], [4]. Majoritatea reţelelor de electrolit prezintă inconvenientul de a nu putea fi întrebuinţate pe cale industrială din lipsă de stabilitate, cauza fiind procesul de oxidare a ionului de Fe^{+2} în ion de Fe^{+3}. De asemenea o concentrare peste limită în fier a soluţiei electrolitice face baia inutilizabilă în timp.

Depunerile electrolitice de aliaje Fe–Ni în condiţiile pe care le-am folosit sînt avantajoase din următoarele puncte de vedere:

– prezintă o aderenţă foarte bună pe suporturi de fier fără strat intermediar de cupru,

– manifestă rezistenţă mare la coroziunea acidă,

– au un aspect strălucitor mai frumos decît al depozitelor de nichel pur,

– posedă cîmpuri coercitive mici.

Pentru obţinerea depozitelor de Fe–Ni am utilizat reţete pe bază de săruri amoniacale sau reţete mixte. Din diversele băi electrolitice încercate prezentăm următoarele variante:

A.			B.		
	$Ni(NH_4)_2(SO_4)_2$	233 g		$Ni(NH_4)_2(SO_4)_2$	100 g
	NaCl	7,4 g		NaCl	10 g
	H_3BO_3	19,2 g		H_3BO_3	30 g
	$Fe(NH_4)_2(SO_4)_2$	3 g		$Fe(NH_4)_2(SO_4)_2$	6 g
	zaharină	0,63 g		zaharină	0,6 g
	H_2O	1000 cc		texapon	0,6 g
				H_2O	1000 cc

C. Baia Watts:	$NiSO_4$	240 g
	$NiCl_2$	45 g
	H_3BO_3	30 g
cu adaus de:	$Fe(NH_4)_2(SO_4)_2$	18 g
	Naftalin disulfonat de natriu	1 g
	zaharină	1 g

Condiţiile de depunere electrolitică

temperatura	20 °C
pH	2,7–3
densitatea de curent	1–8 A/dm²

Întrucît concentraţia absolută a fierului în electrolit are o influenţă incomparabil mai mică asupra compoziţiei acoperirii decît raportul Fe/Ni, este necesară menţinerea unei anumite corelaţii în ce priveşte concentraţia lor.

Modificarea în electrolitul A a conţinutului de $Fe(NH_4)_2(SO_4)_2$ între 2 şi 24 grame permite obţinerea de depozite care conţin fier în proporţie de 6–45% Fe [5].

Curbele din figura 1 trasate cu ajutorul rezultatelor din analizele cantitative arată modificarea conţinutului de Fe din aliaj în funcţie de densitatea de curent.

Din toate datele se vede că o creştere a densităţii de curent determină o scădere a conţinutului procentual de Fe.

Ştiind că în una şi aceeaşi baie raportul Fe/Ni în aliaj depinde de densitatea de curent, pentru a menţine constant raportul concentraţiilor s-au folosit în paralel o anodă de Ni şi alta de Fe. Astfel cunoscută fiind densitatea de curent catodic se poate regla separat curentul în circuitele celor două anode în raportul corespunzător proporţiei metalelor din aliaj.

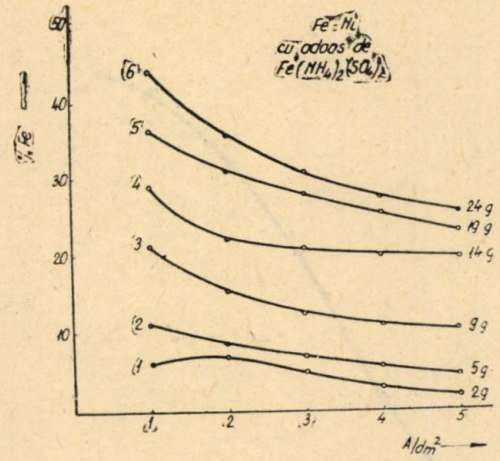


Fig. 1. Conținutul de Fe din aliaj în funcție de densitatea de curent

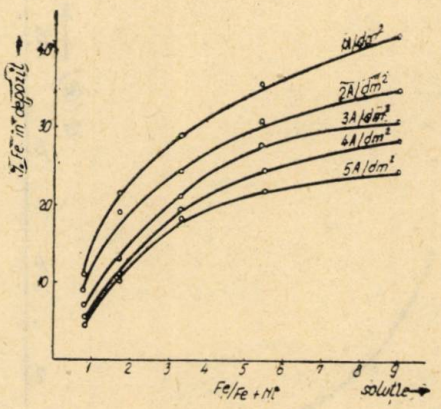


Fig. 2. Conținutul de Fe din aliaj în funcție de concentrația relativă a fierului din soluție

În fig. 2 este redată dependența conținutului de fier în aliaj de concentrația relativă a fierului din soluție.

Mărirea concentrației relative de fier în soluție determină creșterea conținutului de fier în stratul depus.

Electrolitul B în condițiile date micșorează limitele de variație a cantității de fier în depozit între (31% – 21% Fe). În schimb electrolitul C ridică procentul de fier pînă la 50%.

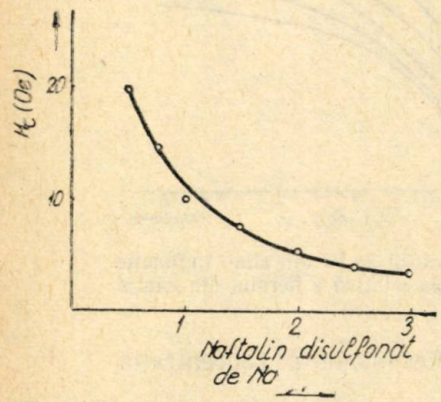
Folosirea de substanțe aditive în electrolit nu afectează compoziția păturii depuse dar îmbunătățește procesul de depunere avînd rol de soluții tampon, de a crește conductibilitatea băii, de a reduce tensiunile interne și a mări gradul de strălucire [6].

Proprietățile magnetice ale acestor aliaje se modifică în mod sensibil în prezența substanțelor superficial active [7]. Depozitele de aliaj obținute cu adaus de naftalindisulfonat de Na prezintă cîmpuri coercitive de valori mici (figura 3) și cicluri de histereză la care raportul de rectangularitate este apropiat de unu.

Curba din figura 4 prezintă valorile cîmpului coercitiv în funcție de densitatea de curent la straturi de 25 μm obținute din baia C.

Comparativ cu păturile electrolitice ale metalelor pure, aliajele Ni – Fe posedă cîmpuri coercitive mult mai mici.

Sub aspectul stabilității la coroziune, păturile de 25 μm realizate cu aceeași densitate de curent (2 A/dm²) din electroliții A, B și C pe suporturi de fier, fără strat intermediar de cupru, arată o rezistență la coroziune comparabilă cu cea prezentată de nichelul pur. Deosebit de rezistente s-au dovedit a fi păturile ce conțin aproximativ 40% Fe. Studiul s-a făcut folosind o soluție de 20% NaCl.



Fifg. 3. Variaţia cîmpului coercitiv cu adausul de naftalindisulfonat de Na

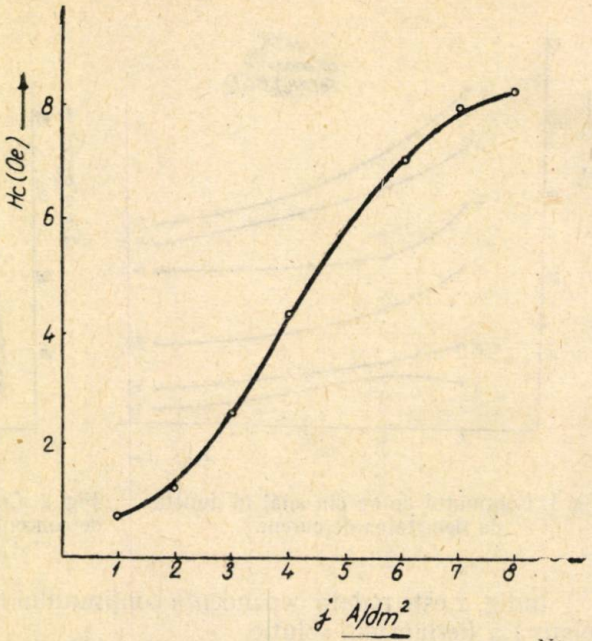


Fig. 4. Variaţia cîmpului coercitiv la aliajul Fe—Ni în funcţie de densitatea de curent (baia C)

II. ALIAJE Co—Ni

Electrodepunerea simultană a cobaltului şi a nichelului conduce la obţinerea de aliaje cu proprietăţi magnetice superioare.

Întrucît raportul componenţilor aliajului Co—Ni este mult influenţat de condiţiile de depunere electrolitică, în cele ce urmează, la o baie dată am urmărit variaţia compoziţiei depozitului în funcţie de densitatea de curent menţinînd neschimbaţi ceilalţi factori [8].

Din diverse reţete încercate ne-am oprit atenţia asupra următoarei compoziţii :

$NiSO_4$	240 g
$NiCl_2$	45 g
H_3BO_3	30 g
$CoSO_4$	16,2 g
zaharină	1 g
H_2O	1 000 cc

Condiţii de depunere : temperatura 20 °C

pH= 2,5

densitate de curent 0,04—1 A/dm².

În acest electrolit am folosit o cantitate de $CoSO_4$ care să dea cobalt în soluție, echivalent fierului din electrolitul C.

Analiza rezultatelor obținute a arătat că în aliaj, conținutul de cobalt depinde substanțial de densitatea de curent (între 0,04 și 0,5 A/dm²) după care rămîne constant (figura 5).

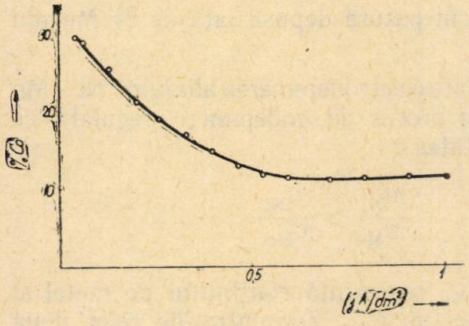


Fig. 5. Conținutul de Co în aliaj în funcție de densitatea de curent

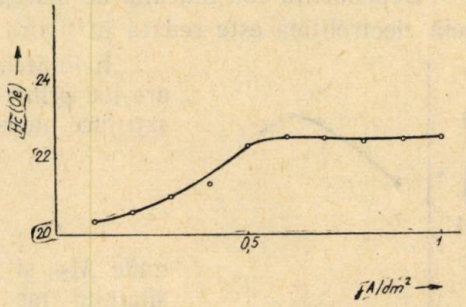


Fig. 6. Variația cîmpului coercitiv la aliajul Co—Ni în funcție de densitatea de curent

O dependență asemănătoare este observată în privința cîmpului coercitiv al aliajului cu aceeași compoziție (30% — 3% cobalt). În figura 6 se prezintă variația cîmpului coercitiv în funcție de densitatea de curent.

Măsurători în regim cvasistatic la frecvență de 50 Hz cu o instalație ce permite ridicarea curbei de histerezis prezintă o rectangularitate pronunțată pentru aliajul de compoziție 95% Ni și 5% Co, ceea ce permite selectarea acestui material în studii de memorii magnetice [9].

Aspecte legate de comportarea la coroziune a aliajului Co—Ni obținut electrolitic din baia Watts, arată o stabilitate mai mare decît depozitele obținute din băile simple de sulfați. Se pare că prezența clorurilor în baie mărește rezistența la coroziune [10]. Pentru dizolvare s-a utilizat o soluție de 20% H_2SO_4.

III. ALIAJE Mn—Ni

Electrodepunerea aliajului Mn—Ni se realizează din băi simple de sulfați, cloruri cu adausuri de $(NH_4)_2SO_4$ citrat de amoniu sau pirofosfat [2] și mai recent din băi de sulfamați la temperaturi ridicate (49—71 °C) [11]. Dificultatea depunerii electrolitice a aliajului Mn—Ni constă în faptul că potențialele standard se situează pentru Ni/Ni^{+2} la —0,23 V iar pentru Mn/Mn^{+2} la — 1,05 V.

În cercetările noastre, asemenea aliajelor anterioare am utilizat baia Watts, la care s-a adăugat 13 g de $MnSO_4 \cdot H_2O$. Apoi în mod treptat cantitatea de sulfat de mangan a fost mărită de 2, 3, 4 și 5 ori.

Acest fapt a determinat modificarea procentului de magan în depozit între 3—5%.

Condiţiile de lucru au fost: pH = 3,8
temperatura camerei 20 °C
j = 1 A/dm².

Dependenţa conţinutului de mangan în pătura depusă faţă de % Mn din baia electrolitică este redată în figura 7.

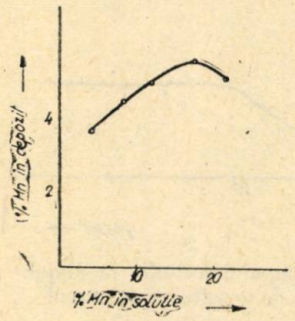


Fig. 7 Conţinutul de Mn la aliajul Mn—Ni în funcţie de % Mn din baia electrolitică.

În limitele date electrodepunerea aliajului Ni—Mn are loc printr-un proces de codepunere regulată ce satisface inegalitatea :

$$\frac{M_{Ni}}{M_{Mn}} > \frac{C_{Ni}}{C_{Mn}}$$

unde M_{Ni} şi M_{Mn} reprezintă conţinutul de metal al aliajului iar C_{Ni} şi C_{Mn} concentraţiile celor două metale în baia electrolitică.

Studiul proprietăţilor magnetice, la aceste aliaje, stabileşte, pentru probe, un cîmp coercitiv cuprins între 100—140 Oe. Aplicarea unui tratament termic prin încălzire pînă la 360° şi apoi răcire bruscă la temperatura mediului ambiant micşorează cîmpul coercitiv cu 10 pînă la 30 Oe.

Aliajul cu 4,5% mangan posedă cel mai mic cîmp coercitiv 12. Curbele de histerezis, urmărite la o magnetizare cvasistatică, în lungul axei, arată că probele netratate termic prezintă axa preferenţială perpendiculară pe generatoarea suprafeţei stratului depus.

Prin tratament termic axa preferenţială tinde să se orienteze în lungul generatoarei suprafeţei cilindrice.

Aliajul Mn—Ni din punct de vedere al acţiunii protectoare, prezintă o foarte mare stabilitate. Probele de 2 μm încercate într-o soluţie de 20% H_2SO_4 şi urmărite în timp arată o pierdere relativă de masă care se reduce la jumătate abia în 60 ore.

CONCLUZII

Aliajele studiate prezintă interes datorită proprietăţilor remarcabile pe care le manifestă.

Condiţiile de depunere, unele aspecte magnetice şi rezistenţa la coroziune constituie domenii de cercetare cu posibilităţi largi de aplicabilitate în practică.

Primită la redacţie la data de 12. VI 1973.

BIBLIOGRAFIE

1. Pfanhauser W., Galvanotehnic Leipzig, 1971, p. 557
2. Brenner A., *Electrodeposition of Alloys*, New-York Academic Press, 1963 v. I
3. Wolf I. W., Mc. Connel V. P., Proc. Amer. Electropol Soc. 215, 1956
4. Lainer V.I., Kudriavţev N.T., *Osnova galvanosteghi*, Metalurgizdat M., 1957 v. II
5. Munteanu A., Kremmer I., Artzner I., Baea R., Buletin ştiin. şi tehn. IPT Mat. Fiz.—Mec. teor., 1971, v. 16 (30) nr. 1
6. Bilfinger R., Strauch A., Internationales Kolloquium Ilmenau, 1958 p. 102
7. Fedotev N. P., Bibicov N. N., Viaceslavov P. N., Griliches S. I., *Elektroliceskie splavi*, Moskva, 1962, p. 228
8. Munteanu A., Schiff A., Marcu C., Rev. Roum. de Phys. nr. 3,1970, v. 15, nr. 3
9. De Sabata C., Marcu C., Studii şi Cercet. de Fiz. v. 23, 10, 1971,
10. Friemel F., Tagungsbericht des XI Inter. Wiss. Koll. T.H. Ilmenau, 1966, p. 41
11. Licht M., Schmidt R., Hausmann A., Herrmann S. (patent) 1496798 München , 1969
12. Munteanu A., Marcu C., Mihailovici D., Elektric, 361, 1971, v. 25, 9, p. 361

ОПЫТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ВИДУ ПОЛУЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СПЛАВОВ НИКЕЛЯ С ФЕРРО И ПАРАМАГНИТНЫМИ МЕТАЛЛАМИ

(РЕЗЮМЕ)

Работа содержит опытное исследование в виду улучшения условий для получения, путем электролитического осаждения, сплавов Fe—Ni (I), Co—Ni (II) и Mn—Ni (III).

Имеется в виду получение сплавов такого состава, чтобы представляли хорошое сцепление осажденных слоев, стойкость при коррозии и оптимальные магнитные свойства.

EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE HERSTELLUNG EINIGER NICKELLEGIERUNGEN MIT FERRO-UND PARAMAGNETISCHE METALLE

(ZUSAMMENFASSUNG)

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Verbesserung der Herstellungsbedingungen Fe—Ni (I), Co—Ni (II) und Mn—Ni (III) Legierungen durch elektrolytischen Niederschlag.

Es wurde die Herstellung jener Legierungen, die eine gute Adhärenz der niedergeschlagenen Schicht, eine Korosionsfestigkeit und optimale magnetische Eigenschaften aufweisen, verfolgt.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

STUDIUL MIŞCĂRILOR PERIODICE CU CIOCNIRI ALE UNUI SISTEM CU DOUĂ MASE LEGATE ELASTIC

DE

GH. SILAŞ L. BRÎNDEU M. TOADER

Dintre mecanismele vibropercutante utilizate în practică unele se studiază pe un model format dintr-o masă, care se ciocneşte cu un reper fix. Regimurile periodice şi stabilitatea lor au fost studiate în [1].

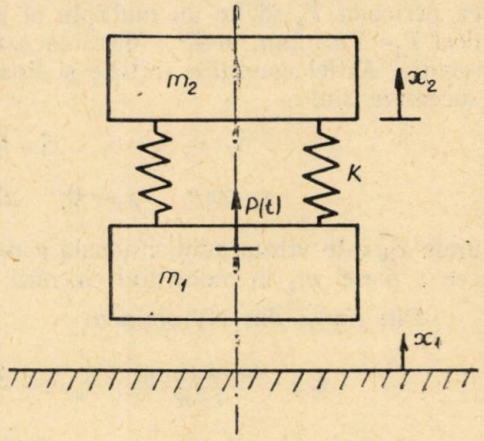
Mişcările altor mecanisme vibropercutante pot fi influenţate de factori datorită cărora studiul mişcării nu se mai poate face pe modelul simplu descris mai sus. În [2] s-a studiat cazul reperului considerat ca un sistem elastic cu frecare vîscoasă, ciocnit de o masă percutantă.

În această lucrare se studiază regimurile periodice şi stabilitatea lor pentru un sistem cu două mase legate elastic, una ciocnindu-se de un reper fix.

1. Masele m_1 şi m_2 ale sistemului legate între ele prin arcul de constantă elastică k, se mişcă pe verticală, masa m_1 ciocnindu-se de reperul fix. Asupra masei percutante m_1 acţionează forţa perturbatoare $P(t)=P_0\cos(\omega t+\varphi)$.

Mişcarea sistemului se studiază în ipoteza că ciocnirea dintre masa m_1 şi limitator este instantanee, cu coeficientul de restituire R $(0<R<1)$.

Notînd cu x_1 deplasarea masei m_1 măsurată faţă de reperul fix şi cu x_2 deplasarea masei m_2 din poziţia corespunzătoare arcului nedeformant, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării sînt :



$$m_1\ddot{x}_1+k(x_1-x_2)=P_0\cos(\omega t+\varphi)-m_1g$$

$$m_2\ddot{x}_2-k(x_1-x_2)=-m_2g. \tag{1}$$

Dacă se notează $y=x_1-x_2$ ecuaţiile (1) devin

$$\ddot{y}+\omega_n^2 y=\frac{P_0}{m_1}\cos(\omega t+\varphi) \tag{2}$$

unde

$$\omega_n^2 = k\,\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}$$

Soluția ecuației diferențiale (2) este

$$y = A\cos(\omega_n t+\psi) + \frac{P_0}{m_1(\omega_n^2-\omega^2)}\cos(\omega t+\varphi) \tag{3}$$

A și ψ sînt constante de integrare. Ținînd seamă de (1) avem

$$\begin{aligned} x_1 &= Cm_2\cos(\eta\tau+\psi)+f(\xi-1)\cos(\tau+\varphi)-\lambda\tau^2+D\tau+E \\ x_2 &= -Cm_1\cos(\eta\tau+\psi)-f\cos(\tau+\varphi)-\lambda\tau^2+D\tau+E \end{aligned} \tag{4}$$

în care

$$\eta=\frac{\omega_n}{\omega},\quad C=\frac{A}{m_1+m_2},\quad \lambda=\frac{g}{2\omega^2},\quad f=\frac{kP_0}{m_1m_2\omega^2(\omega_n^2-\omega^2)},\quad \xi=\frac{m_2\omega^2}{k}$$

în care C, ψ, D, E sînt constantele de integrare, $\tau=\omega t$ este timpul adimensional. Ecuațiile (4) reprezintă legile mișcării celor două mase în intervalul de timp dintre două ciocniri succesive.

Dacă mișcările cu ciocniri (4) ale celor două mase sînt periodice, trebuie ca perioada T_1 să fie un multiplu al perioadei $T=2\pi$ a forței perturbatoare, deci $T_1=Tn=2\pi n$, $n\in Z^+$. Mișcarea este o succesiune de cicluri care se repetă identic. Astfel condițiile inițiale și finale ale mișcării între cele două ciocniri succesive sînt:

$$\begin{aligned} &\tau=0,\ x_1=0;\quad x_1'=R\,x_{10}';\quad x_2=x_0;\quad x_2'=x_{20}' \\ &\tau=2\pi n,\quad x_1=0;\quad x_1'=-x_{10}';\ x_2=x_0;\quad x_2'=x_{20}' \end{aligned} \tag{5}$$

unde x_{10}' este viteza adimensională a masei m_1 la începutul unei ciocniri și x_{20}' cea a masei m_2 în momentul ciocnirii.

Din (5) și din (4) obținem:

$$x_{10}'=\frac{4\pi\,n\lambda\,(1+\mu)}{1+R};\quad x_0=-\frac{2\pi n\lambda\,(1+\mu)}{\eta}\operatorname{ctg}\pi n\eta - f\xi\cos\varphi$$

$$x_{20}'=\frac{2\pi n\lambda\,(1+\mu)\,(1-R)}{(1+R)\,(\xi-1)},\quad \sin\varphi=\frac{2\pi n\lambda\,(1+\mu)\,(1-R)}{f\,(1+R)\,(\xi-1)},\quad \cos\psi=\cos(2\pi n\eta+\psi)$$

$$C=\frac{2\pi\,n\lambda}{m_1\eta\sin\pi n\eta},\quad D=2\pi n\lambda,\quad E=-\frac{2\pi\,n\lambda\,\mu}{\eta}\operatorname{ctg}\pi n\eta - f(\xi-1)\cos\varphi \tag{6}$$

unde $\mu=\frac{m_2}{m_1}$, iar pentru constanta de integrare ψ vom consdiera prima valoare $\psi=-\pi n\eta$.

Din (6) pentru $\sin\varphi$ rezultă condiția de existență a mișcărilor periodice de mișcare în cazul sistemului dat, adică

$$\left|\frac{2\pi n\lambda\,(1+\mu)\,(1-R)}{f\,(1+R)\,(\xi-1)}\right|\leqslant 1 \tag{7}$$

2. Pentru studiul stabilității mișcării în primă aproximație se folosește metoda diferențelor finite [3], considerînd variații ale constantelor de integrare ceea ce face ca metoda să aibă o aplicabilitate mai largă. Să presupunem că x_0, x'_{10}, x'_{20} și φ au la sfîrșitul unei anumite ciocniri valorile perturbate $x_0+\Delta x_0$, $R\,(x'_{10}+\Delta x'_{10})$, $x'_{20}+\Delta x'_{20}$, $\varphi+\Delta\varphi_0=\varphi+\Delta\tau_0$.

Pentru a studia ciclul de ordinul $k+1$ se notează cu Δx_k, $\Delta x'_{2,k}$, $R\Delta x'_{1,k}$, $\Delta\tau_k$ perturbațiile la începutul acestui ciclu și cu Δx_{k+1}, $\Delta x'_{2,k+1}$, $-\Delta x'_{1\,k+1}$, $\Delta\tau_{k+1}$ cele de la sfîrșit. Durata ciclului este $2\pi n+\Delta\tau_{k+1}-\Delta\tau_k$.

Mișcarea în acest ciclu este dată de ecuațiile (4) însă constantele de integrare se înlocuiesc cu cele corespunzătoare acestui ciclu care au valorile $C+\Delta C_{k+1}$, $\psi+\Delta\psi_{k+1}$, $D+\Delta D_{k+1}$, $E+\Delta E_{k+1}$.

La începutul ciclului $\tau=0$ liniarizînd ecuațiile obținute avem

$$\begin{aligned}
0&=m_2\Delta C_{k+1}\cos\pi n\eta+Cm_2\Delta\psi_{k+1}\sin\pi n\eta-f\,(\xi-1)\,\Delta\tau_k\sin\varphi+\Delta E_{k+1}\\
-R\Delta x'_{1k}&=m_2\eta\Delta C_{k+1}\sin\pi n\eta-Cm_2\eta\Delta\psi_{k+1}\cos\pi n\eta-f\,(\xi-1)\,\Delta\tau_k\cos\varphi+\\
&\qquad+\Delta D_{k+1}\\
\Delta x_k&=-m_1\Delta C_{k+1}\cos\pi n\eta-Cm_1\Delta\psi_{k+1}\sin\pi n\eta+f\Delta\tau_k\sin\varphi+\Delta E_{k+1}\\
\Delta x'_{2k}&=-m_1\eta\Delta C_{k+1}\sin\pi n\eta+Cm_1\Delta\psi_{k+1}\cos\pi n\eta+f\Delta\tau_k\cos\varphi+\Delta D_{k+1}
\end{aligned} \tag{8}$$

din care determinăm valorile variațiilor constantelor de integrare în ciclul de ordinul $k+1$

$$\Delta C_{k+1}=\frac{-\eta\Delta x_k\cos\pi n\eta-R\Delta x'_{1k}\sin\pi n\eta-\Delta x_{2k}\sin\pi n\eta+f\xi\Delta\tau_k\,(\cos\varphi\sin\pi n\eta+\eta\sin\varphi\cos\pi n\eta)}{\eta\,(m_1+m_2)}$$

$$\Delta D_{k+1}=\frac{-m_1R\Delta x'_{1k}+m_2\Delta x'_{2k}-f\,(m_1+m_2-m_1\xi)\Delta\tau_k\cos\varphi}{m_1+m_2} \tag{9}$$

$$\Delta E_{k+1}=\frac{m_2\Delta x_k-f\,(m_1+m_2-m_1\xi)\,\Delta\tau_k\sin\varphi}{m_1+m_2}$$

$$\Delta\psi_{k+1}=\frac{\eta\Delta x_k\sin\pi n\eta+R\Delta x'_{1k}\cos\pi n\eta+\Delta x'_{2k}\cos\pi n\eta-f\,\xi\Delta\tau_k\,(\cos\varphi\cos\pi n\eta-\eta\sin\varphi\sin\pi n\eta)}{\eta\,C\,(m_1+m_2)}$$

Considerînd sfîrșitul ciclului $\tau=2\pi n+\Delta\tau_{k+1}-\Delta\tau_k$ după liniarizare se obține:

$$0=m_2\Delta C_{k+1}\cos\pi n\eta-Cm_2\Delta\psi_{k+1}\sin\pi n\eta-f(\xi-1)\Delta\tau_{k+1}\sin\varphi+2\pi n\Delta D_{k+1}+$$
$$+\Delta E_{k+1}$$

$$\Delta x'_{1,\,k+1}=-m_2\Delta C_{k+1}\sin\pi n\eta-Cm_2\eta\Delta\psi_{k+1}\cos\pi n\eta-f(\xi-1)\Delta\tau_{k+1}\cos\varphi+$$
$$+\Delta D_{k+1}-(2\pi n\mu n\eta\operatorname{ctg}\pi n\eta+2\lambda)(\Delta\tau_{k+1}-\Delta\tau_k) \tag{10}$$

$$\Delta x_{k+1}=-m_1\Delta C_{k+1}\cos\pi n\eta+Cm_1\Delta\psi_{k+1}\sin\pi n\eta+f\Delta\tau_{k+1}\sin\varphi+2\pi n\Delta D_{k+1}+$$
$$+\Delta E_{k+1}$$

$$\Delta x'_{2,\,k+1}=m_1\eta\Delta C_{k+1}\sin\pi n\eta+Cm_1\eta\Delta\psi_{k+1}\sin\pi n\eta+f\Delta\tau_{k+1}\cos\varphi+\Delta D_{k+1}+$$
$$+(2\pi n\lambda\eta\operatorname{ctg}\pi n\eta-2\lambda)(\Delta\tau_{k+1}-\Delta\tau_k).$$

În acest sistem se înlocuiesc valorile (9) ale variațiilor constantelor de integrare, obținîndu-se sistemul liniar și omogen în perturbații

$$a_{i1}\Delta x_{k+1}+b_{i1}\Delta x_k+a_{i2}\Delta x'_{1k+1}+b_{i2}\Delta x'_{1k}+a_{i3}\Delta x'_{2k+1}+b_{i3}\Delta x'_{2k}+a_{i4}\Delta\tau_{k+1}+$$
$$+b_{i4}\Delta\tau_k=0,\quad i=1,\,2,\,3,\,4. \tag{11}$$

în care:

$$a_{11}=0,\quad a_{12}=0,\quad a_{13}=0,\quad a_{14}=-\frac{4\pi n\lambda(1+\mu)}{1+R}$$

$$b_{11}=\frac{2\mu\sin^2\pi n\eta}{1+\mu};\quad b_{12}=-\frac{R(2\pi n\eta+\mu\sin 2\pi n\eta)}{1+\mu};\quad b_{13}=\frac{\eta(2\pi n\eta-\sin 2\pi n\eta)}{1+\mu}$$

$$b_{14}=\frac{\mu f\xi}{\eta(1+\mu)}(\sin 2\pi n\eta\cos\varphi+\eta\cos 2\pi n\eta\sin\varphi)-\frac{2\pi nf(1+\mu-\xi)\cos\varphi}{1+\mu}-$$
$$-\frac{f(1+\mu-\xi)\sin\varphi}{1+\mu}+2\pi n\lambda(1+\mu)$$

$$a_{21}=0;\quad a_{22}=-1;\quad a_{23}=0;\quad a_{24}=-(-2\cos\varphi+2\pi n\lambda\mu\eta\operatorname{ctg}\pi n\eta+2\lambda)$$

$$b_{21}=\frac{\mu\eta\sin 2\pi n\eta}{1+\mu};\quad b_{22}=-\frac{R(\mu\cos\pi n\eta+1)}{1+\mu};\quad b_{23}=\frac{2\mu\sin^2\pi n\eta}{1+\mu}$$

$$b_{24}=\frac{\mu f\xi}{1+\mu}(\cos 2\pi n\eta\cos\varphi-\eta\sin 2\pi n\eta\sin\varphi)+\frac{f(1+\mu-\xi)\cos\varphi}{1+\mu}+$$
$$+2\pi n\lambda\mu\eta\operatorname{ctg}\pi n\eta+2\lambda$$

$$a_{31}=0,\quad a_{32}=0,\quad a_{33}=0,\quad a_{34}=f\sin\varphi$$

$$b_{31}=\frac{\mu+\cos 2\pi n\eta}{1+\mu};\quad b_{32}=\frac{R(\sin 2\pi n\eta-2\pi n\eta)}{\eta(1+\mu)};\quad b_{33}=\frac{\sin 2\pi n\eta+2\pi n\eta\mu}{\eta(1+\mu)}$$

$$b_{34}=-\frac{f\xi}{(1+\mu)}(\sin 2\pi n\eta\cos\varphi+\eta\sin\varphi\cos 2\pi n\eta)-\frac{2\pi nf(1+\mu-\xi)\cos\varphi}{1+\mu}-$$

$$-\frac{f(1+\mu-\xi)\sin\varphi}{1+\mu}$$

$$a_{41}=0\quad a_{42},=0,\quad a_{43}=0,\quad a_{44}=f\cos\varphi+2\pi n\lambda\eta\operatorname{ctg}\pi n\eta-2\lambda$$

$$b_{41}=-\frac{\eta\sin 2\pi n\eta}{1+\mu};\quad b_{42}=-\frac{2R\sin^2\pi n\eta}{1+\mu};\quad b_{43}=\frac{\mu+\cos 2\pi n\eta}{1+\mu}$$

$$b_{44}=-\frac{f\xi}{1+\mu}(\cos 2\pi n\eta\cos\varphi-\eta\sin\varphi\sin 2\pi n\eta)-\frac{f(1+\mu-\xi)\cos\varphi}{1+\mu}-$$

$$-2\pi n\lambda\eta\operatorname{ctg}\pi n\eta+2\lambda$$

Pentru a rezolva sistemul (11) se caută soluţii de forma :

$$\Delta\tau_k=\sigma\beta^k;\quad \Delta x_{1k}=u\beta^k;\quad \Delta x_k=v\beta^k;\quad \Delta x'_{2k}=w\beta^k \tag{12}$$

obţinînd un sistem omogen în raport cu σ, u, v şi w a cărui determinant trebuie să fie nul pentru ca să existe soluţii diferite de zero, adică :

$$|a_{ij}\beta+b_{ij}|=0. \tag{13}$$

Ecuaţia (13) este ecuaţia caracteristică în β a cărei rădăcini trebuie să fie cu modulul subunitar pentru ca mişcarea periodică să fie stabilă. Pentru aceasta coeficienţii ecuaţiei trebuie să îndeplinească condiţii asigurate de criterii cunoscute.

Astfel dacă se aplică ecuaţiei (13) scrisă sub forma de determinant criteriul recent al lui Arjanîh [5] se pot face cu uşurinţă calcule la maşinile electronice. Ecuaţiei (13) de gradul patru în β i se poate aplica şi criteriul lui Schur. Prin transformarea $\beta=\frac{1+\delta}{1-\delta}$ se obţine o ecuaţie în δ ale cărei rădăcini au partea reală negativă cînd ecuaţia în β are rădăcinile cu modulul subunitar. Ecuaţiei în δ obţinute i se poate aplica criteriul lui Routh - Hurwitz.

BIBLIOGRAFIE

1. Быховский, И.И., Дорохова А.Д., Зарецкий М.В., Лукошский, С.И. О некоторых периодических движениях и структуре фазово пространства. Ударно-колебательной системы с постоянной восстанавляющей силой. Изв. АН СССР. ОТН 1964 г. №2 .
2. Silaş Gh., Brîndeu L., Hegedüs A., Mişcări periodice cu ciocniri ale vibratorului liber. Buletinul ştiinţific şi tehnic. I.P. Timişoara 1967 tom. I2 (26) fas. 1.
3. Корбинский, А.Е., *Механизмы с упругими связями, Динамика и устойчивость*, Изд, Наука, Москва, 1964 г.
4. Беспалова, Л.В., К теории виброударного механизма, Изв. Ан СССР ОТН 1957 г. № 5.
5. Аржаных, И.С., О новых неравенствах устойчивости, Автоматика и телемеханика Том 22 № 4 1961 г.
6. Баркан, Д.Д., *Виброметод в строительстве*. Госстройиздат, Москва, 1959 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ С СОУДАРЕНИЯМИ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ УПРУГО СВЯЗАННЫМИ МАССАМИ

(РЕЗЮМЕ)

Учитывается схема виброударной системы из двух упруго связанных масс, одна из которых соударяется с неподвижным репером. Определяются условия существования (6) и (7) периодических режимов движения, считая что соударение мгновенно и производится с коффициентом восстановления R.

Исследование устойчивости в первом приближении производится при применении метода конечных разниц в новой форме путем введения изменений интегрирующих постоянных, определенных уравнениями (9). Для того, чтобы периодическое движение было устойчивым, необходимо чтобы корни характерного полученного уравнения (13) имели подединичный модуль. Данное условие обеспечивается при применении одного известного критерия (Аржаных, Шур, Рут-Гурвиц и т.д.).

DAS STUDIUM DER PERIODISCHEN BEWEGUNGEN MIT STÖSSEN EINES SYSTEMS MIT ZWEI ELASTISCH VERBUNDENEN MASSEN

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es vird ein Stoss schwingsystem betrachtet, welches aus zwei Massen besthet, welche elastisch verbunden sind und davon eine auf einen festen Limitator stösst. Es werden die Existenzbedingungen (6) und (7) der periodischen Bewegungszustände bestimmt, wenn die Stösse als plötzlich angenommen und durch die Stossziffer R gekennzeichnet sind.

Untersucht wird die Stabilität in erster Näherung mit der finiten Differenz methode in einer neuen Form durch die Einführung der Variationen der Integrationskonstanten welche durch die Gleichiungen (9) bestimmt werden.

Damit die periodischen Bewegungen stabil sind, muss der absolute wert der Wurzel der Charakteristischen Gleichung (13) kleiner sein als Eins.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

MÉTHODE DIRECTE EMPLOYÉE POUR DÉTERMINER LES CONDITIONS DE STABILITÉ DES MOUVEMENTS PÉRIODIQUES DU SYSTÈME VIBROPERCUTANT

PAR

L. BRÎNDEU

Hommage au Professeur Gh. Silaş a l'occasion de son 60-e anniversaire

Les methodes générales de la théorie des vibrations nonlinéaires ne peuvent être appliquées a l'étude des systèmes vibropercutants à cause de la discontinuité des vitesses. Tout de même, il est possible d'adapter les methodes connues de la théorie des vibrations aux caractéristiques spécifiques de ces systémes.

En ce sens on a développé une nouvelle méthode directe d'écriture des conditions de stabilité dans le cas des systèmes vibropercutants a un degré de liberté [1].

Par l'emploi de la méthode directe il sera possible de détérminer les conditions de stabilité même si, à partir des équations différentielles du mouvement, on ne peut pas calculer effectivement les lois du mouvement.

Ensuite on élargira la méthode directe d'écriture des conditions de stabilité à des systémes à plusieurs degrés de liberté. On faire l'étude à l'aide des èquations de Lagrange et de la fonction de la liaison unilatérale [2].

1. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

La position du systéme vibropercutant ayant n degrés de liberté on la détermine à l'aide des coordonnées généralisées q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

En employant les équations de Lagrange on a donné une méthode générale d'étude du mouvement des systémes vibropercutants [2]. On présentera ici seulement quelques éléments nécessaires a l'étude de la stabilité par la méthode directe [1].

Pour l'étude du mouvement il sont nécessaire de déterminer l'énergie cinétique du système, qui, par rapport aux vitesses géneralisées $\dot{q}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$

est une forme quadratique positivement définie. Ainsi l' éxpression de l'energie cinétique sera de la forme :

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j ; \quad (a_{ij}=a_{ji}) \tag{1}$$

où les coefficients a_{ij} peuvent être des fonctions de coordonnées généralisées q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. En introduisant les forces généralisées Q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ on peut former les éxpressions :

$$G_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_i} - Q_i \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

qui dépendent des grandeurs $\ddot{q}_j$, $\dot{q}_j$, q_j, et $t (j=1, 2, \ldots, n)$. Donc les équations différentielles du mouvements seront écrites

$$G_i = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{2'}$$

On étudie les collisions qui apparaissent pendant le mouvement en supposant que le système est soumis à la liaison unilatérale :

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \geqslant 0. \tag{3}$$

Dans l'intervalle de deux collisions successives qui correspondent aux moments $t=t_k$ et $t=t_{k+1}$, les lois du mouvement $q_i=q_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ sont les solutions des équations différentielles (2') qui vérifient les conditions initiales.

$$q_i(t)=q_{ik} ; \quad \dot{q}_i(t_k)=\dot{q}'_{ik} \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

À la fin de l'intervalle il faut satisfaire les conditions finales :

$$q_i(t_{k+1})=q_{i,k+1} ; \quad \dot{q}_i(t_{k+1})=\dot{q}_{i,k+1} \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Aux moments des collisions est valable l'égalité (3).

Pour les vitesses de la fin de la collision on a établi les formules :

$$\dot{q}'_{ik} = \dot{q}_{ik} + (1+R)\frac{A_{ik}}{B_k}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)_k \dot{q}_{jk} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_k\right], \tag{6}$$

A_i étant le déterminant que l'on obtient en remplaçant la colonne i du déterminant $|a_{ij}|$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ par $\frac{\partial f}{\partial q_1}$, $\frac{\partial f}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q_n}$; et B le déterminant qui se forme du déterminant $|a_{ij}|$ en ajoutant une ligne et une colonne formée des mêmes éléments $\frac{\partial f}{\partial q_1}$, $\frac{\partial f}{\partial q_2}$, $\ldots$, $\frac{\partial f}{\partial q_n}$ et 0 [2].

2 LES MOUVEMENTS PÉRIODIQUES DU SYSTÈME VIBROPERCUTANT

Sur les systèmes vibropercutants agissent d'habitude des forces d'excitation périodiques dont la période sera notée par T.

L'une des conditions nécesaires pour réaliser des mouvements périodiques est que la période soit un multiple rT ($r=1, 2, \ldots, n$) de la période de la force d'excitation. Le cas habituellement rencontré est celui où pendant une période du mouvement, le système arrive une seule fois sur liaison. Si la première collision a lieu pour $t=t_0$, le moment de la collision de l'ordre k dans le mouvement périodique sera

$$t_k=t_0+krT.$$

Pour que le mouvement du système vibropercutant soit périodique il este encore nécessaire que toutes les collisions s'effectuent dans la même position et que les vitesses du commencement de toutes les collisions soient les mêmes, c'est-adire :

$$q_i(t_k)=q_{iC},\ \dot{q}_i(t_k)=\dot{q}_{iC} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{7}$$

Les vitesses de la fin de la collisions se calculent avec les formules (6) et résultent les mêmes $\dot{q}'_{iC}$ ($i=1, 2, \ldots, n$). Les lois du mouvement périodique $\overline{q}_i=\overline{q}_i(t)$ ($i=1, 2, \ldots, n$) sont des solutions du système d'équations différentielles

$$\overline{G}_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{E}_C}{\partial \dot{\overline{q}}_i}\right)-\frac{\partial \overline{E}_C}{\partial \overline{q}_i}-\overline{Q}_i=0 \tag{8}$$

qui satisfont les conditions (7).

En employant les conditions finales (5) et l'égalité (3) on peut déterminer les valeurs des paramètres $\dot{q}_{iC}$, q_{iC}, et t_0. On détermine avec ces valeurs les lois du mouvement périodique $\overline{q}_i=\overline{q}_i(t)$ ($i=1, 2, \ldots, n$) èntre deux collisions successi ves, ainsi que les conditions d'éxistence des mouvements périodiques.

La stabilité des mouvements périodiques

La méthode directe de détérmination des conditions de stabilité des mouvements périodiques, introduite dans le cas du système non-linéaire, à un degré de liberté [1], sera élargie aussi d'autres systèmes plus généraux, dont le mouvement est étudié à l'aide des équations de Lagrange (2′).

Pour l'étude de la stabilité, on consideré des mouvements perturbés du système qui différent du mouvement périodique. Ces mouvements on les obtient en supposent qu'à partir d'une certaine collision les paramètres du mouvement ont l'autres valeurs que dans le mouvement périodique. Mais à cause de ces pérturbations les lois du mouvement sont perturbées dans l'intervalele de deux collisions aussi. Donc on va considerer une solution du système d'équations

(2′) qui diffère par les variations x_i des lois du mouvement périodique $\overline{q}_i=\overline{q}_i(t)$, c'est-à- dire :

$$q_i=\overline{q}_i+x_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{9}$$

Si l'on fait ces transformations dans les équations (2′) et l'on tient compte des équations (8) resultent les équations en variations :

$$\Delta G_i=G_i-\overline{G}_i=0 \tag{10}$$

Dans la première approximation on étudie la stabilité en considérant les petites perturbations $\dot{x}_i$ et x_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Aprés les développements en série des fonctions G_i, en negligeant des termes en variations de degré superieur à l'unité, les équations (10) deviennent :

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\overline{G}_i}{\partial\ddot{\overline{q}}_j}\ddot{x}_j+\frac{\partial\overline{G}_i}{\partial\dot{\overline{q}}_j}\dot{x}_j+\frac{\partial\overline{G}_i}{\partial\overline{q}_j}x_j\right)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{11}$$

Formalement le système d'équations en variations (11) s'obtient directement des équations (2′), et généralement les coefficients sont des fonctions périodiques de t à la période rT. Si le système d'equations (2′) est lineaire les coefficients des équations (11) ont des valeurs constantes.

Dans la méthode directe d'étude la solution du système d'équations en variations (11) est employée pour trouver les relations de récurrence entre les perturbations des paramètres du mouvement à deux collisions successives.

La collision de l'ordre k dans le mouvement perturbé aura lieu au moment $t=t_k+\Delta t_k$, dans la positions correspondente aux coordonnées $q_{ic}+\Delta q_{ik}$ $(i=1, 2,\ldots\ \ldots,\ n)$. Les vitesses au commencement de cette collision seront $\dot{q}_{ic}+\Delta\dot{q}_{ik}$, et à la fin $\dot{q}'_{ic}+\Delta\dot{q}'_{ik}$. Si l'on introduit ces grandeurs dans les formules (6) on obtient :

$$\Delta\dot{q}'_{ik}=\Delta\dot{q}_{ik}+(1+R)\frac{A_{ic}}{B_c}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)_c\Delta\dot{q}_{jk}+\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}\,\Delta q_{jk}+\theta_{i0}\,\Delta t_k \tag{12}$$

où

$$\theta_{ij}=(1+R)\frac{\partial}{\partial q_{jc}}\left\{\frac{A_{ic}}{B_c}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\right)_c\dot{q}_{sc}+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c\right]\right\}$$

$$\theta_{i0}=(1+R)\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{\frac{A_{ic}}{B_c}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\right)_c\dot{q}_{sc}+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c\right]\right\}$$

Ainsi, dans l'intervalle considéré, les conditions initiales deviennent :

$$q_i\,(t_k+\Delta t_k)=q_{ic}+\Delta q_{ik}\,;\quad \dot{q}_i(t_k+\Delta t_k)=\dot{q}'_{ic}+\Delta\dot{q}'_{ik} \qquad (i=1,\ 2,\ldots,n) \tag{13}$$

et les finales :

$$q_i\,(t_{k+1}+\Delta t_{k+1})=q_{iC}+\Delta q_{i,\,k+1};\quad \dot{q}_i\,(t_{k+1}+\Delta t_{k+1})=\dot{q}_{iC}+\Delta\dot{q}_{i,\,k+1}$$
$$(i=1,\,2,\ldots,n) \tag{14}$$

Parce qu'il est nécessaire qu'au moment de la collision, l'égalité (3) soit vérifiée, il résulte une équation de récurrence linéaire en perturbations.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)_C \Delta q_{jk}+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_C \Delta t_k=0. \tag{15}$$

En tenant compte de la forme (9) des lois du mouvement perturbé, et du fait que les variations $\dot{x}_i$, x_i $(i=1,\,2,\,\ldots,\,n)$ sont du même ordre de grandeur que les perturbations des paramètres du mouvement, des conditions initiales on obtient :

$$x_i\,(t_k)=\Delta q_{ik}-\dot{q}_{iC}\Delta t_k \quad \dot{x}_i\,(t_k)=\Delta\dot{q}_{ik}-\ddot{q}_{iC}\Delta t_k \quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n) \tag{16}$$

et des finales :

$$x_i\,(t_{k+1})=\Delta q_{i,\,k+1}-\dot{q}_{iC}\,\Delta t_k\,;\ \dot{x}_i\,(t_{k+1})=\Delta\dot{q}_{i,\,k+1}-\ddot{q}_{iC}\Delta t_{k+1} \quad (i=1,\,2,\ldots,n) \tag{17}$$

où $\dot{q}'_{iC}$ et $\ddot{q}_{iC}$ $(i=1,\,2,\,\ldots,\,n)$ peuvent être calculés a l'aide des équations (2′).

On déterminé d'abord la solution de l'équation en variations (11) pour les conditions initiales (16). En employant les conditions finales (17) on obtient les équations de récurrence linéaires par rapport aux perturbations des paramètres du mouvement, qui, avec l'équation (15) sont nécessaires à écrire les conditions de stabilité.

Systèmes a deux degrés de liberté

L'étude des mouvements périodiques des systèmes vibropercutants à deux degrés de liberté est particulièrement difficile, surtout à cause du grand volume de calculs nécessaires à la détermination des conditions de stabilité. Par conséquent il y a peu d'études complètes pour de tels systèmes [3].

À l'aide des équations de Lagrange et, de la méthode directe présentée plus haut, on peut déterminer les conditions de stabilité pour le cas le plus général de systéme vibropercutant à deux degrés de liberté.

Pour simplifier on emploiera comme coordonnées y_1 et y_2 les coordonnées normales du système. Ainsi les énergies cinétique et potentielle peuvent-être mises sous la forme.

$$E_C=\frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 \tag{18}$$

et

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2. \tag{19}$$

La fonction de la liaison unilatérale dans toutes les situations connues est linéaire par rapport aux coordonnées. Donc, dans les coordonnées normales, pour toutes les situations la liaison unilatérale peut-être écrite :

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 \geqslant 0 \tag{19'}$$

où α_1, α_2, α_3 sont des grandeurs constantes.

Si l'on fait les notations :

$$-\alpha_1 y_1 = q_1, \quad -\alpha_2 y_2 = q_2, \quad \alpha_3 = q_0, \quad \frac{\alpha_2^2 m_1}{\alpha_1^2 m_2} = \mu \tag{20}$$

l'expression de l'énergie cinétique (18) devient :

$$E_C = \frac{m_1}{2\alpha_2^2} (\mu \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{18'}$$

et la liaison unilatérale :

$$f(q_1, q_2) = q_0 - q_1 - q_2 \geqslant 0.$$

En employant les expressions (18) et (19), des formules (6) il résulte :

$$\begin{aligned} \dot{q}'_{1k} &= \frac{\mu - R}{1+\mu} \dot{q}_{1k} - \frac{1+R}{1+\mu} \dot{q}_{2k} \\ \dot{q}'_{2k} &= -\frac{\mu(1+R)}{1+\mu} \dot{q}_{1k} + \frac{1-\mu R}{1+\mu} \dot{q}_{2k} \end{aligned} \tag{21}$$

Les équations en variations (11) pour ce cas s'écrivent :

$$\ddot{x}_i + p_i^2 x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

où

$$p_i^2 = \frac{k_i}{m_i}$$

De même l'équation (15) correspondant à la liaison unilatérale (19') devient :

$$\Delta q_{1k} + \Delta q_{2k} = 0. \tag{23}$$

Après l'intégrations des équations en variations (22) pour les conditions initiales (16) à l'aide des conditions finales (17), on obtient les autres équations de récurrence linéaires en perturbations et ensuite les conditions de stabilité. Mais on constate que par les transformations (20) les équations en variations

(22), les formules (21) et l'équation en pérturbations (23), sont identiques à celles employées antérieurement pour un cas particulier [3].

Par consèquent, les résultats des calculs effectués en détail antérieurement, demeurent valables pour le cas général également.

L'équation caractéristique du système vibropercutant sera :

$$\beta^4+a_1\beta^3+a_2\beta^2+a_3\beta+a_4=0 \tag{24}$$

où

$$a_1=-\frac{1}{1+\mu}\left\{2[(\mu-R)\cos p_1rT+(1-\mu R)\cos p_2rT]-\right.$$

$$\left.-(1+R)\left(\frac{1}{p_1}\sin p_1rT+\frac{\mu}{p_2}\sin p_2rT\right)\frac{\ddot{q}_{1c}+\ddot{q}_{2c}}{\dot{q}_{1c}+\dot{q}_{2c}}\right\}$$

$$a_2=\frac{2(1+R)}{1+\mu}\left(\frac{1}{p_1}\sin p_1rT\cos p_2rT+\frac{\mu}{p_2}\cos p_1rT\sin p_2rT\right)\frac{\ddot{q}_{1c}+\ddot{q}_{2c}}{\dot{q}_{1c}+\dot{q}_{2c}}-$$

$$-\frac{1}{(1+\mu)^2}\left\{2[2R(1+\mu)^2-\mu(1+R)^2]\cos p_1rT\cos p_2rT-\mu(1+R)^2\left(\frac{p_2}{p_1}+\frac{p_1}{p_2}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sin p_1rT\sin p_2rT-(1-\mu R)^2-(\mu-R)^2\right\} \tag{25}$$

$$a_3=\frac{1}{1+\mu}\left\{2R[(1-\mu R)\cos p_1rT+(\mu-R)\cos p_2rT]-(1+R)\left(\frac{1}{p_1}\sin p_1rT+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mu}{p_2}\sin p_2rT\right)\frac{\ddot{q}_{1c}+\ddot{q}_{2c}}{\dot{q}_{1c}+\dot{q}_{2c}}\right\}$$

$$a_4=R^2$$

Pour que le mouvement périodique considéré soit stable il est nécessaire que les racines de l'équation (24) soient en module inférieures à l'unité. Donc les conditions de stabilité sont obtenues à l'aide du critère Schur [4].

BIBLIOGRAFIE

1. L. Brîndeu, Über die Bestimmung der Stabilitätsbedingungen der periodischen Bewegungen eines Stossschwingers mit einem Freiheitsgrad. Bul. Inst. Politehnic din Iaşi, Secţia IV. Mec. tehnică, tom. XVII, fasc. 3–4, 1971.
2. Gh. Silaş, L. Brîndeu, Behandlung periodischer Bewegungen von Rüttelsystemen mit den Lagrangeschen Gleichungen, VDI Berichte, nr. 135, 1969.
3. Gh. Silaş, L. Brîndeu, Stabilitatea mişcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu două grade de libertate, Bul. St. şi Tehnic al I.P. Timişoara, seria Mat.-Fiz.-Mec. teor. şi aplicată, tom 15 (29), fasc. 2, 1970.
4. A. E. Kobrinski, *Mehanizmî s uprughimi sviaziami*. Izd. Nauka, Moskva, 1957.

METODA DIRECTĂ FOLOSITĂ PENTRU DETERMINAREA CONDIȚIILOR DE STABILITATE A MIȘCĂRILOR PERIODICE ALE UNUI SISTEM VIBROPERCUTANT

(REZUMAT)

Se extinde metoda directă de determinare a condițiilor de stabilitate a mișcărilor periodice la cazul unui sistem vibropercutant cu mai multe grade de libertate și o cuplă percutantă.

La fel ca la sistemele neliniare, se folosesc ecuațiile în variații obținute din ecuațiile lui Lagrange ale mișcării, pentru care se deduc condițiile limită corespunzătoare momentelor ciocnirilor din mișcarea periodică.

ПРЯМОЙ МЕТОД ПРИМЕНЁННЫЙ В ВИДУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ

(РЕЗЮМЕ)

Распространяется прямой метод определения условий устойчивости периодических движений в случае виброударной системы с несколькими степенями свободы и ударной парой.

Точно как в нелинейных системах, применяются уравнения в вариациях из уравнений Лагранжа, для которых выводится предельные условия соответственные моментам соударений из периодического движения.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

REGIMURILE STAŢIONARE ALE UNOR AGREGATE ACŢIONATE DE MOTOARE ELECTRICE ASINCRONE

DE

I. GROŞANU

Omagiu profesorului emerit
dr. ing. GHEORGHE SILAS
cu ocazia împlinirii a 60 de ani.

La studiul regimurilor staţionare ale multor agregate acţionate de motoare electrice asincrone se consideră o expresie aproximativă a caracteristicii statice, presupusă funcţie liniară de viteza unghiulară a rotorului. Aici se vor studia regimurile staţionare şi stabilitatea lor în cazul cînd caracteristica statică a motorului este o funcţie oarecare a vitezei unghiulare şi agregatul nu are transmisie.

1. REGIMURI STAŢIONARE PERIODICE.

Se vor considera regimurile staţionare periodice ale unor agregate la care motorul de acţionare este cuplat direct cu maşina de lucru, în cazul cînd ecuaţiile de mişcare sînt :

$$\Omega^2 y'' + (2D\Omega + \Omega\Omega')\, y' + y = F(\varphi),\quad \Omega\Omega' = \varepsilon f(y,\ \varphi,\ \Omega), \tag{1}$$

unde variabila independentă, este unghiul φ, iar ε este parametru mic [3], [4] ; y, Ω deplasarea şi viteza unghiulară, adimensionale.

Folosind metoda perturbaţiilor [1], [2], pentru aproximaţia de ordinul zero, se găseşte că $\Omega^{(0)}$ este o mărime constantă care urmează să se determine considerînd aproximaţia de ordinul întîi. Aceste regimuri staţionare sînt cele mai simple posibile, pentru care, viteza unghiulară medie este constantă.

Sînt, însă posibile şi regimuri staţionare mai complexe [3] pentru care viteza unghiulară medie este o funcţie lent variabilă de unghiul φ. Aceste regimuri staţionare considerate pentru condiţii iniţiale nule, au fost mai puţin studiate.

La studiul lor aproximativ se consideră dezvoltările :

$$\begin{aligned} y &= y^{(0)}(\varphi, \omega) + \varepsilon y^{(1)}(\varphi, \omega) + \varepsilon^2 y^2(\varphi, \omega) + \ldots, \\ \Omega &= \omega + \varepsilon\Omega^{(1)}(\varphi, \omega) + \varepsilon^2\Omega^{(2)}(\varphi, \omega) + \ldots, \\ \frac{d\omega}{d\varphi} &= \varepsilon g^{(1)}(\omega) + \varepsilon^2 g^{(2)}(\omega) + \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

cu care pentru aproximaţia de ordinul zero, se găseşte:

$$\Omega^{(0)2}\frac{\partial^2 y^{(0)}}{\partial\varphi^2}+2D\,\Omega^{(0)}\frac{\partial y^{(0)}}{\partial\varphi}+y^{(0)}=F(\varphi), \tag{3}$$

şi a doua din ecuaţiile sistemului (1) conduce la:

$$\omega g^{(1)}(\omega)+\omega\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial\varphi}=f(y^{(0)},\ \varphi,\ \omega) \tag{4}$$

Înlocuind în (4) pe $y^{(0)}$ determinat din ecuaţia (3) şi punînd condiţia ca funcţia $\Omega^{(1)}(\varphi,\ \omega)$ să fie periodică pentru unghiul φ cu perioada 2π, rezultă:

$$\omega g^{(1)}(\omega)=[f(y^{(0)},\ \varphi,\ \omega)]_c \tag{5}$$

unde $[f(\varphi)]_c$ reprezintă partea constantă din dezvoltarea în serie trigonometrică a funcţiei $f(y^{(0)},\ \varphi,\ \omega)$, iar $g^{(1)}_{(\omega)}$ este funcţie 0 arbitrară.

Din (2) şi din (5) se găseşte ecuaţia:

$$\frac{\omega\,d\omega}{[f(y^{(0)},\ \varphi,\ \Omega^{(0)})]_c}=\varepsilon\,d\varphi, \tag{6}$$

de unde rezultă variaţia lui ω în funcţie de unghiul φ.

Dacă $\omega=\Omega^{(0)}$, ţinînd seama de (2) din ecuaţia (5) se găseşte condiţia:

$$[f(y^{(0)},\ \varphi,\ \Omega^{(0)})]_c=0 \tag{7}$$

ecuaţia algebrică ale cărei rădăcini $\Omega^{(0)}$, reale şi pozitive, determină cele mai simple regimuri staţionare periodice determinate în condiţii iniţiale nule.

2. STABILITATEA REGIMURILOR STAŢIONARE.

Pentru studiul stabilităţii regimurilor staţionare se foloseşte metoda perturbaţiilor aplicate regimului staţionar $(y,\ \Omega)$. Considerînd perturbaţiile mici u şi v [3], [4], din sistemul (1) se obţin ecuaţiile liniare în perturbaţii:

$$\Omega^2u''+(2D\Omega+\Omega\Omega')u'+u+\Omega x'v'+(2Dx'+\Omega'x'+2\Omega x'')\,v=0 \tag{8}$$

$$\Omega v'+\Omega' v=\varepsilon\frac{\partial f}{\partial y}u+\varepsilon\frac{\partial f}{\partial\Omega}v,$$

unde $f(y,\ \varphi,\ \Omega)$ este presupusă o funcţie cunoscută de variabilele independente y, φ şi Ω.

Deoarece sistemul (8) este liniar cu coeficienţii funcţiei periodice de unghiul φ avînd perioada 2π, va admite soluţii de forma:

$$u=e^{\lambda\varphi}P(\varphi),\quad v=e^{\lambda\varphi}Q(\varphi), \tag{9}$$

unde $P(\varphi)$ şi $Q(\varphi)$ sînt periodice cu perioada 2π.

Pentru $\varepsilon=0$ rezultă $\lambda_1^{(0)}=0$ și $\lambda_{3,4}^{(0)}=-D\pm i\sqrt{1-D^2}$ încît [3], [4], pentru $0<\varepsilon\ll 1$ se vor considera dezvoltările:

$$P(\varphi)=P^{(0)}(\varphi)+\varepsilon P^{(1)}(\varphi)+\varepsilon^2 P^{(2)}(\varphi)+\ldots.$$
$$Q(\varphi)=Q^{(0)}(\varphi)+\varepsilon Q^{(1)}(\varphi)+\varepsilon^2 Q^{(2)}(\varphi)+\ldots. \tag{10}$$
$$\lambda=\varepsilon\lambda^{(1)}+\varepsilon^2\lambda^{(2)}+\ldots.$$

Ținînd seamă de ecuațiile (8), fără a restrînge generalitatea, se poate alege $Q^{(0)}=1$, iar $P^{(0)}$ se determină din:

$$\Omega^{(0)}P^{(0)\prime\prime}+2D\Omega^{(0)}P^{(0)\prime}+P^{(0)}=-2\,(Dy^{(0)}+\Omega^{(0)}y^{(0)\prime\prime}). \tag{11}$$

În aproximația de ordinul întîi din (8), rezultă:

$$\Omega^{(0)}\lambda^{(1)}+\Omega^{(0)}Q^{(1)\prime}+\Omega^{(1)\prime}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 P^{(0)}+\left(\frac{\partial f}{\partial\Omega}\right)_0 \tag{12}$$

unde $(f_y)_0$ reprezintă derivata funcției f în raport cu variabila y în care, după derivare, se fac înlocuirile $y=y^{(0)}$ și $\Omega=\Omega^{(0)}$, iar pentru periodicitatea funcției $Q^{(1)}(\varphi)$ trebuie să fie îndeplinită condiția:

$$\Omega^{(0)}\lambda^{(1)}=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 P^{(0)}+\left(\frac{\partial f}{\partial\Omega}\right)_0\right]_c. \tag{13}$$

Deoarece regimurile staționare sînt caracterizate de $\Omega^{(0)}>0$, pentru ca $\lambda^{(1)}<0$, este necesar să fie satisfăcută inegalitatea:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 P^{(0)}+\left(\frac{\partial f}{\partial\Omega}\right)_0\right]_c<0, \tag{14}$$

caz, în care, regimul staționar periodic (y,Ω), va fi asimptotic stabil.

3. EXEMPLU

Ca exemplu se va considera agregat cu mecanism bielu - manivela, la care raportul între lungimea manivelei și bielei este mic.

Se vor neglija greutățile și rigiditățile elementelor mecanismului și se va admite că el acționează o masă vibrantă avînd legături elastice liniare. Ecuațiile de mișcare [2] ale agregatului, sînt:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=k_1 r\sin\varphi \tag{15}$$
$$J\ddot{\varphi}=M_s(\dot{\varphi})+rk_1x\cos\varphi-r^2k_1\sin\varphi\cos\varphi$$

Cu notaţiile:

$$\omega_n^2=\frac{k}{m},\quad \tau=\omega_n t,\quad 2D=\frac{c}{m\omega_n},\quad \eta=\frac{k_1}{m\omega_n^2},$$

$$\varepsilon\nu=\frac{1}{J\omega_n^2},\quad \varepsilon\delta=\frac{r^2k_1}{J\omega_n^2},\quad y=\frac{x}{r},\quad y'=\frac{dy}{d\varphi},\quad \Omega=\frac{d\varphi}{d\tau}, \tag{16}$$

sistemul (15) devine:

$$\Omega^2y''+(2D\Omega+\Omega\Omega')\,y'+y=\eta\sin\varphi \tag{17}$$

$$\Omega\Omega'=\varepsilon\nu\,M_s(\Omega)+\varepsilon\delta\,y\cos\varphi-\frac{1}{2}\varepsilon\delta\sin 2\varphi$$

şi deci, se încadrează în clasa agregatelor avînd ecuaţiile de mişcare (1) pentru care s-au studiat regimurile staţionare:

Pentru ca să aibe loc regimuri staţionare periodice simple, trebuie să fie îndeplinită condiţia (7), care în acest caz, admiţînd că $M_s(\Omega)$ se exprimă aproximativ prin relaţia lui Kloss [4], devine:

$$\Gamma(\Omega^{(0)})=\Gamma_1(\Omega^{(0)}), \tag{18}$$

unde:

$$\Gamma(\Omega^{(0)})=\frac{\eta\delta D\Omega^{(0)}}{(1-\Omega^{(0)})^2+4D^2\Omega^{(0)\,2}};$$

$$\Gamma_1(\Omega^{(0)})=\rho\,\frac{S_k(1-\alpha\Omega^{(0)})}{(1-\alpha\Omega^{(0)})^2+S_k^2}; \tag{19}$$

$$\rho=2\mu M_k,\qquad \bar{\delta}=\varepsilon\delta,\qquad \bar{\nu}=\varepsilon\nu,\quad \alpha=\frac{\omega_n}{\omega_c}.$$

Rădăcinile ecuaţiei (18) se determină geometric din $\Gamma(\Omega^{(0)})\subset\Gamma_1(\Omega^{(0)})$. Analizînd cele două curbe în fig. 1, prin intersecţia lor rezultă că sînt posibile. cel mult, trei regimuri staţionare, caracterizate de rădăcinile $\Omega_1^{(0)}<\Omega_2^{(0)}<\Omega_3^{(0)}$,

Pentru studiul stabilităţii regimurilor staţionare, ţinînd seamă că:

$$y^{(0)}=A\sin\varphi+A\cos\varphi, \tag{20}$$

unde:

$$A=\frac{\eta\,(1-\Omega^{(0)2})}{R},\qquad B=\frac{-2D\eta\Omega^{(0)}}{R},$$

$$R=(1-\Omega^{(0)2})^2+4D^2\Omega^{(0)2},$$

din ecuaţia (11) rezultă:

$$P^{(0)}=C_1\sin\varphi+C_2\cos\varphi \tag{21}$$

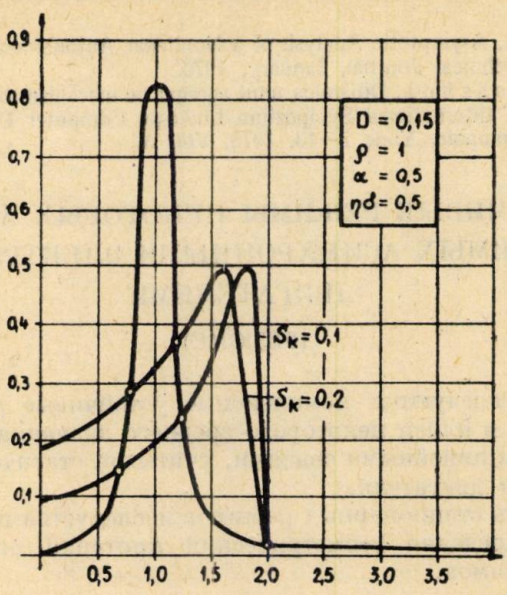


Fig. 1

cu :

$$C_1 = \eta \frac{\Omega^{(0)} - 2\Omega^{(0)3} + \Omega^{(0)5} - 4D^2\Omega^{(0)}}{R^2}, \tag{22}$$

$$C_2 = -\eta \frac{D - 3D\Omega^{(0)4} + 2D\Omega^{(0)2} - 4D^3\Omega^{(0)2}}{R^2}.$$

Ţinînd seamă de ecuaţiile (15) şi de relaţiile (20), (21) şi (22), condiţia de stabilitate (14) devine :

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega^{(0)}} > \frac{d\Gamma_1}{d\Omega^{(0)}} \tag{23}$$

condiţie care, aplicată cazului particular, conduce la concluzia că regimurile staţionare corespunzătoare rădăcinilor $\Omega_1^{(0)}$ şi $\Omega_3^{(0)}$, sînt stabile, iar regimul staţionar corespunzător rădăcinii $\Omega_2^{(0)}$ este instabil.

În mod analog se pot studia şi alte regimuri staţionare mai complexe admiţînd un anumit mod de definire a funcţiei $g^{(1)}(\omega)$.

BIBLIOGRAFIE

1. Christ H., Stabile und instabile Betriebszustände eines federnd galagerten Motors mit Unwucht. ZAMM, Bd. 47, S. T. 1967.

2. Groşanu I., Kovacs F., Asupra dinamicii unor maşini cu moment de inerţie redus variabil. Simpozionul de mecanisme şi transmisii mecanice. Reşiţa 1972, Partea I.

3. Morrison I. A., Asymptotic Analysis of a Nonlinear Autonomous System. The Bell System Technical Journal, Ianuary, 1970.
4. Silaş Gh., Groşanu I., Dinamica unui agregat cu mecanism bielă-manivelă şi volant. IFTOM International Sympozium Linkages Computer Design Methods. Bucharest, Romania, Yune 7–13, 1973, Vol. A.

УСТОЙЧИВЫЕ РЕЖИМЫ НЕКОТОРЫХ АГРЕГАТОВ ПРИВОДИМЫХ АСИНХРОННЫМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ДВИГАТЕЛЯМИ

(РЕЗЮМЕ)

В работе исследуются комплексные устойчивые режимы с медленным изменением в близи некоторого среднего значения для класса агрегатов с упругими линейными связями, учитывая статическую характеристику приводного двигателя.

Устойчивость стационарных режимов исследуется при помощи метода возмущений, определяя геометрический критерий оценки стабильных устойчивых режимов.

THE STEADY - STATE REGIMES OF SOME AGGREGATES WHICH ARE DRIVEN BY ELECTRIC ASYNCRONOUS MOTORS.

(SUMMARY)

The paper deals with complex steady-state regimes which have slow variation round an average for a class of aggregates with elastic linear coupling considering the statical characteristic of the drive motor.

The stability of the steady - state regimes is studied by the perturbation method considering a geometrical criterion for estimation of the stable steady - state regimes.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

DETERMINAREA MIŞCĂRILOR PERIODICE CU CIOCNIRI PLASTICE ($R=0$) ŞI CONTACT NEINSTANTANEU ALĔ UNEI PARTICULE PE O PLATFORMA VIBRATOARE

DE

DOINA BECHERESCU

Omagiu profesorului emerit
dr. ing. GHEORHGE SILAS
cu ocazia împlinirii a 60 de ani

1. INTRODUCERE

Se consideră sistemul mecanic format dintr-o particulă liberă de masă m şi o platformă de masă M fixată prin arcurile cu constantă elastică k, în prezenţa unei amortizări vîscoase cu coeficientul h (fig. 1).

Asupra platformei de masă M acţionează forţa perturbatoare $Q(t)$ periodică de perioada $T=\frac{2\pi}{\omega}$, produsă de un generator de vibraţii cu excentrice rigid fixat de platformă.

În timpul mişcării particula se ciocneşte periodic de platformă. Ciocnirea se consideră instantanee cu coeficientul de restituire la ciocnire nul ($R=0$).

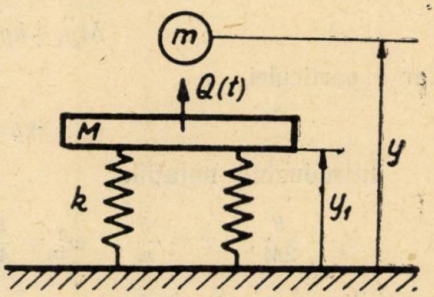


Fig 1.

Modelul din figura 1 a fost studiat în lucrarea [1], considerînd ciocnirea elastico-plastică ($R\neq 0$).

2. CLASIFICAREA MIŞCĂRILOR PERIODICE POSIBILE.

În cazul cînd coeficientul de restituire la ciocnire este nul ($R=0$), mişcările periodice pot fi fără sau cu opriri de durată finită pe platformă.

Pentru a arăta cazurile posibile, conform metodei date în lucrarea [2] este necesar să se considere funcţia legăturii unilaterale.

Dacă se notează cu y, și y_1 coordonatele particulei și platformei măsurate din poziția nedeformată a arcurilor, atunci sistemul vibropercutant va fi supus la legătura unilaterală

$$\varphi(y, y_1) \geqslant 0 \tag{1}$$

În cazul valabilității egalității (1) între particulă și platformă vor avea loc ciocniri.

După cum se știe [2] la începutul unei ciocniri care are loc pentru $t=t_k$ trebuie să existe condiția

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 < 0, \tag{2}$$

iar la sfîrșit

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_1 \geqslant 0, \tag{3}$$

unde indicii 0 și 1 arată că expresiile din paranteză se calculează la începutul, respectiv sfîrșitul unei ciocniri.

Ciocnirea fiind perfect plastică ($R=0$), întotdeauna este verificată egalitatea din condiția (3). În continuare, pentru a stabili natura contractului, trebuie determinat semnul derivatei de ordinul doi. Pentru aceasta, vom ține seamă de ecuațiile diferențialetcare descriu mișcarea sistemului în etapa în care are loc desprinderea particulei.

Ecuația diferențială a mișcării platformei în aceasta etapă este

$$M\ddot{y}_1 + h\dot{y}_1 + ky_1 = -Mg + Q(t), \tag{4}$$

iar a particulei

$$m\ddot{y} + h\dot{y} = -mg. \tag{5}$$

Introducînd notațiile

$$c_1 = \frac{h}{2M}, \quad c = \frac{h}{m}, \quad \omega_{1n}^2 = \frac{k}{M}, \quad q_1(t) = \frac{Q(t)}{M}, \quad q_1^*(t) = q(t) - g$$

ecuațiile (3) și (4) devin

$$\ddot{y}_1 + 2c_1\dot{y}_1 + \omega_{1n}^2 y_1 = q_1^*(t), \tag{6}$$

$$\ddot{y} + c\dot{y} = -g. \tag{7}$$

Ținînd seamă de ecuațiile (6) și (7), derivata de ordinul doi va fi

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_1 = (\ddot{y} - \ddot{y}_1)_1 = \ddot{y}_0' - \ddot{y}_{10}' = -q_1(t_k) + \omega_{1n}^2 y_0 + (2c_1 - c)\ddot{y}_0', \tag{8}$$

unde y_0 este poziția sistemului în momentul ciocnirii.

Bazaţi pe analiza semnului mărimii $\psi(t_k)=\omega_{1n}^2 y_0+(2c_1-c)\dot{y}_0'-q_1(t_k)$ vom deosebi trei cazuri:

Cazul I:

$$\psi(t_k)>0 \tag{9}$$

În acest caz avem

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_1>0 \tag{10}$$

ceea ce înseamnă că contactul dintre particulă şi platformă este instantaneu. Studiul mişcărilor periodice şi a stabilităţii acestora, se face ca şi pentru $R\neq 0$ cu ajutorul relaţiilor stabilite în lucrarea [1] unde se va lua $R=0$.

Cazul II:

$$\psi(t_k)=0 \tag{11}$$

În acest caz se obţine

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_1=0 \tag{12}$$

Dacă şi toate celelalte derivate la dreaptă sînt nule, contactul dintre particula şi platformă nu mai este instantaneu.

Cazul III:

$$\psi(t_k)<0 \tag{13}$$

În acest caz contactul dintre particula şi platformă este tot neinstantaneu. După ciocnire, particula se va mişca concomitent cu platformă în timp finit după care urmează o nouă desprindere. Pe durata contactului dintre particulă şi platformă este valabilă ecuaţia echilibrului relativ al particulei, adică:

$$\frac{N(t)}{m}=q_1(t)-\omega_{1n}^2 y-(2c_1-c)\dot{y}, \tag{14}$$

unde $N(t)$ este reacţiunea normală a platformei. Prin urmare, în timpul contactului dintre particulă şi platformă se obţine condiţia $N(t)\geqslant 0$.

Desprinderea particulei de platforma mobilă poate avea loc pentru un moment $t=\tau_k$ cînd $N(t)$ devine nulă, adică

$$q_1(\tau_k)=\omega_{1n}^2 y(\tau_k)+(2c_1-c)\dot{y}(\tau_k) \quad t_k\leqslant\tau_k t\leqslant_{k+1} \tag{15}$$

3. DETERMINAREA MIŞCĂRILOR PERIODICE CÎND CONTACTUL NU ESTE INSTANTANEU

Perioada mişcării se va compune din intervalul în care particula se află pe platformă şi intervalul în care are loc zborul particulei. În continuare, mişcarea sistemului se studiază considerînd separat cele două etape.

Prima etapă după ciocnire este etapa mișcării concomitente a particulei și platformei. Ținînd seamă că în timpul contactului $y_1=y$, ecuația diferențială a mișcării sistemului va fi

$$(m+M)\,\ddot{y}+h\dot{y}+ky=-(m+M)\,g+Q\,(t). \tag{16}$$

Introducînd notațiile:

$$\omega_{2n}^2=\frac{k}{m+M},\quad c_2=\frac{h}{2\,(m+M)},\quad q_2\,(t)=\frac{Q\,(t)}{m+M},\quad q_2^*\,(t)=q_2\,(t)-g, \tag{17}$$

ecuația (16) se poate scrie ca sistem de forma

$$\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{D}_2^*\mathbf{y}+\mathbf{f}_2^*(t) \tag{18}$$

unde:

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y \\ \dot{y}\end{pmatrix},\quad \mathbf{D}_2^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_{2n}^2 & -2c_2\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}_2^*=\begin{pmatrix} 0 \\ q_2^*\,(t)\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Soluția sistemului (18) în etapa considerată va fi:

$$\mathbf{y}\,(t)=e^{\mathbf{D}_2^*(t-t_k)}\,\mathbf{y}_0'+\int_{t_k}^{t} e^{\mathbf{D}_2^*(t-s)}\,\mathbf{f}_2^*\,(s)\,ds \tag{20}$$

unde $\mathbf{y}_0'$ este vectorul care corespunde condițiilor inițiale ale etapei mișcării concomitente.

Deoarece am notat cu y_0 poziția sistemului în momentul ciocnirii, și cu $\dot{y}_0'$ viteza sistemului după ciocnire, condițiile inițiale ale mișcării în etapa considerată sînt:

$$y\,(t_k)=y_1\,(t_k)=y_0,\quad \dot{y}\,(t_k)=\dot{y}_1\,(t_k)=\dot{y}_0'. \tag{21}$$

deci

$$\mathbf{y}_0'=\begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0'\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Contactul dintre particulă și platformă se menține atîta timp cît reacțiunea $N\,(t)>0$. Momentele τ_k ale desprinderii se determină din ecuația (14), care se mai poate scrie

$$q_1\,(\tau_k)=\{\omega_{1n}^2,\ 2c_1-c\}\ \mathbf{y}\,(\tau_k) \tag{23}$$

Durata mișcării concomitente a particulei și platformei va fi τ_k-t_k. La sfîrșitul acestui interval se obține relația

$$\mathbf{y}\,(\tau_k)=e^{\mathbf{D}_2^*(\tau_k-t_k)}\,\mathbf{y}_0'+\int_{t_k}^{\tau_k} e^{\mathbf{D}_2^*(\tau_k-s)}\,\mathbf{f}_2^*\,(s)\,ds. \tag{24}$$

După desprindere urmează etapa în care particula se află în zbor. Durata etapei de zbor va fi $t_{k+1}-\tau_k$, unde t_{k+1} este momentul ciocnirii de ordinul $k+1$.

Mișcarea platformei în această etapă va fi descrisă de ecuația diferențială (5) care poate fi scrisă

$$\dot{\mathbf{y}}_1=\mathbf{D}_1^* \mathbf{y}_1+\mathbf{f}_1^* (t), \tag{25}$$

unde

$$\mathbf{y}_1=\begin{pmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_1^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_{1n}^2 & -2c_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1^* (t)=\begin{pmatrix} 0 \\ q_1^* (t) \end{pmatrix} \tag{26}$$

Mișcarea particulei în aceeași etapă va fi descrisă de ecuația (6), care va fi:

$$\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{D}^*\mathbf{y}+\mathbf{f}^*, \tag{27}$$

unde

$$\mathbf{D}^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^*=\begin{pmatrix} 0 \\ -g\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{28}$$

Soluțiile generale ale sistemelor (25) și (27) sînt:

$$\mathbf{y}_1 (t)=e^{\mathbf{D}_1^* (t-\tau_k)} \mathbf{y} (\tau_k)+\int_{\tau_k}^{t} e^{\mathbf{D}_1^* (t-s)} \mathbf{f}_1^* (s)\, ds, \tag{29}$$

$$\mathbf{y} (t)=e^{\mathbf{D}^* (t-\tau_k)} \mathbf{y} (\tau_k)+\int_{\tau_k}^{t} e^{\mathbf{D}^* (t-s)} \mathbf{f}^* ds. \tag{30}$$

Pentru ca mișcarea sistemului să fie periodică, este necesar ca în momentul $t_{k+1}=t_k rT$ $(r=1, 2\ldots)$ să fie îndeplinite condițiile:

$$y (t_{k+1})=y_1 (t_{k+1})=y_0,\ \dot{y}(t_{k+1})=\dot{y}_0,\ \dot{y}_1 (t_{k+1})=\dot{y}_{10} \tag{31}$$

Aceste condiții finale pot fi scrise

$$\mathbf{y} (t_{k+1})=\begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_1 (t_{k+1})=\begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_{10} \end{pmatrix} \tag{32}$$

Ținînd seamă de condițiile (32), pentru sfîrșitul intervalului rezultă relațiile:

$$\mathbf{y} (t_{k+1})=e^{\mathbf{D}^* (t_{k+1}-\tau_k)} \mathbf{y} (\tau_k)+\left(\int_{\tau_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{D}^* (t_{k+1}-s)} ds\right) \mathbf{f}^*, \tag{33}$$

$$\mathbf{y}_1 (t_{k+1})=e^{\mathbf{D}_1^* (t_{k+1}-\tau_k)} y (\tau_k)+\int_{\tau_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{D}_1^* (t_{k+1}-s)} \mathbf{f}_1^* (s)\, ds. \tag{34}$$

Deoarece ciocnirea este instantanee, între vitezele de la începutul și sfîrșitul unei ciocniri există relațiile cunoscute [3], care pentru $R=0$, devin

$$\dot{y}'_{10}=\dot{y}'_0=\frac{m\dot{y}_0+M\dot{y}_{10}}{m+M} \tag{35}$$

Ținînd seamă de relația (35) și de faptul că $y_1(t_{k+1})=y(t_{k+1})=y_0$ se poate scrie

$$\mathbf{y}'_0=\mathbf{a}\mathbf{y}(t_{k+1})+\mathbf{b}\,\mathbf{y}_1(t_{k+1}), \tag{36}$$

unde

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{m}{m+M}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{M}{m+M}\end{pmatrix}. \tag{37}$$

Relațiile (23), (24), (33), (34) și (36) formează un sistem cu ajutorul căruia se determină mișcările periodice ale sistemului vibropercutant. Eliminînd din acest sistem vectorii $\mathbf{y}(\tau_k)$ și $\mathbf{y}'_0$, rezultă

$$\mathbf{y}_1(t_{k+1})=e^{\mathbf{D}_1^*(t_{k+1}-\tau_k)}\{\omega_{1n}^2\,2c_1-c\}\,q_1(\tau_k)+\int_{\tau_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{D}_1^*(t_{k+1}-s)}\,\mathbf{f}_1^*(s)\,ds \tag{38}$$

$$\mathbf{y}(t_{k+1})=e^{\mathbf{D}^*(t_{k+1}-\tau_k)}\{\omega_{1n}^2,2_1c-c\}\,q_1(\tau_k)+\left(\int_{\tau_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{D}^*(t_{k+1}-s)}\,ds\right)\mathbf{f}^*, \tag{39}$$

$$q_1(\tau_k)=\{\omega_{1n}^2\,2c_1-c\}\{e^{\mathbf{D}_2^*(\tau_k-t_{k+1})}[\mathbf{a}\mathbf{y}(t_{k+1})+\mathbf{b}\mathbf{y}_1(t_{k+1})]+$$

$$+\int_{\tau_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{D}^2(\tau_k-s)}\,\mathbf{f}_2^*(s)\,ds\} \tag{40}$$

Din acest sistem echivalent cu cinci ecuații scalare se determină parametrii t_{k+1}, τ_k, y_0, $\dot{y}_0$ și $\dot{y}_{10}$ corespunzători mișcării periodice.

BIBLIOGRAFIE

1. Doina, Becherescu Studiul mișcării cu salturi într-un mediu cu frecare vîscoasă a unei particule pe o platformă vibrantă acționate de un generator de vibrații. Studii și cercetări matematice, tom. 26, Nr. 10, 1973.
2. Gheorhe Silaș, Liviu Brîndeu, Behandlung periodischer Bewegungen von Rüttelsystem mit Lagrangeschen Gleichungen. V. D. I. Bericht Nr. 135, Frühjahr, 1969.
3. F. Peterka, Periodicke kmitani mechanicke sonstavy s vnitrnimi razy .Stoinicky Casopis XVI, Nr. 3, 1965.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ С ПЛАСТИЧЕСКИМИ СОУДАРЕНИЯМИ ($R=0$) И НЕМГНОВЕННЫМ КОНТАКТОМ НЕКОТОРОЙ ЧАСТИЦЫ НА ВИБРИРУЮЩЕЙ ПЛОЩАДКЕ

(РЕЗЮМЕ)

В работе исследуются периодические движения с пластическими соударениями ($R=0$) некоторой материальной, свободной частицы, произведенные вибрирующей площадкой, приведенной вибрационным генератором.

Возможные периодические движения разделяются на движения без контакта, либо с контактом с законченной длительностью на площадке.

Для случая немгновенного контакта между частицей и площадкой устанавливаются уравнения из которых следуют параметры периодических определяемых движений.

DIE BESTIMMUNG PERIODISCHER SCHWINGUNGEN BEI PLASTISCHEN STÖSSEN ($R=0$) UND ANDAUERNDER BERÜHRUNG EINES STÖSSELS AUF EINEM SCHWINGKÖRPER

(ZUSAMMENFASSUNG)

Die vorliegende Arbeit untersucht die periodischen Schwingungen und plastischen Stösse ($R=0$) eines Stössels, die von einem Schwingkörper hervorgerufen werden, der von einem Schwingungserzeuger in Bewegung gesetzt wird.

Die solcherart möglichen periodischen Schwingungen werden nach der Dauer des Haftens in Schwingungen mit sofortigem Abheben und Schwingungen mit andauernder Berührung mit dem Schwingkörper eingeteilt.

Für den Fall eines sofortigen Abheben des Stössels vom Schwingkörper werden Gleichungen aufgestellt, woraus die für die periodischen Schwingungen charakteristischen Parameter hervorgehen.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată
Tom. 19(33), fasc. 1/1974

ASUPRA MIŞCĂRILOR VIBROPERCUTANTE PERIODICE PRODUSE DE EXCITAŢIA ARMONICĂ ŞI DREPTUNGHIULARĂ

DE

A. HEGEDÜS

Omagiu profesorului emerit
dr. ing. GHEORGHE SILAS
cu ocazia împlinirii a 60 de ani

1. INTRODUCERE

În studiul sistemelor vibropercutante se presupune în general că excitaţia este armonică [1] – [7], deşi pot apărea şi prezintă interes şi alte forme de excitaţie [8] – [11].

În prezenta lucrare se compară proprietăţile mişcărilor periodice produse de excitaţia armonică şi cea dreptunghiulară în cazul unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate (fig. 1).

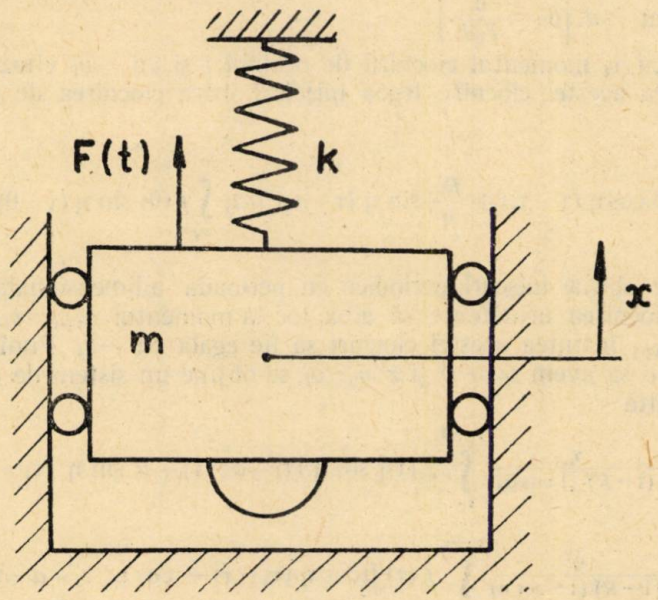


Fig. 1

Ciocnirile se consideră instantanee şi se caracterizează prin coeficientul de restituire $R(0<R<1)$. Se presupune că disipare de energie se produce numai la ciocniri. Se studiază mişcările periodice cu o ciocnire într-o perioadă, perioada fiind un multiplu întreg al perioadei excitaţiei.

2. STUDIUL MIŞCĂRILOR PERIODICE ÎN CAZUL UNEI EXCITAŢII OARECARI

La început se presupune că asupra sistemului vibropercutant din fig. 1 acţionează o forţă periodică oarecare, ce se exprimă sub forma

$$F(t)=F_0 f(\omega t), \quad \omega=\frac{2\pi}{T} \tag{1}$$

unde F_0 este valoarea maximă a forţei, iar $f(\omega t)$ o funcţie adimensională periodică, cu perioada T.

Folosind mărimile adimensionale

$$\tau=\omega t, \quad z=\frac{x}{F_0/k}, \quad \eta=\frac{\sqrt{k/m}}{\omega}, \tag{2}$$

ecuaţia diferenţială a mişcării între două ciocniri este:

$$z''+\eta^2 z=\eta^2 f(\tau). \tag{3}$$

Ordonata x se măsoară din poziţia de echilibru static. Ordonata limitatorului se notează cu $-d.\left(\delta=\frac{d}{F_0/k}\right)$.

Notînd cu τ_i momentul ciocnirii de ordinul i şi cu $-v_i$ viteza adimensională înaintea acestei ciocniri, legea mişcării între ciocnirea de ordinul i şi $i+1$, este:

$$z=-\delta\cos\eta(\tau-\tau_i)+\frac{Rv_i}{\eta}\sin\eta(\tau-\tau_i)+\eta\int_{\tau_i}^{\tau} f(\theta)\sin\eta(\tau-\theta)\,d\theta. \tag{4}$$

Pentru a obţine mişcări periodice cu perioada adimensională $2\pi n$, este necesar ca ciocnirea următoare să aibă loc la momentul $\tau_{i+1}=\tau_{i+a}$, $(a=2\pi n)$ şi viteza $-v_{i+1}$ înaintea acestei ciocniri să fie egală cu $-v_i$. Punînd condiţia ca la $\tau=\tau_i+a$ să avem $z=-\delta$ şi $z'=-v_i$, se obţine un sistem de două ecuaţii din care rezultă

$$\delta=-\frac{\eta}{(1-R)(1\cos\alpha)}\int_{\tau_i}^{\tau_i+a} f(\tau)[\sin\eta(\tau_i+a-\tau)+R\sin\eta(\tau_i-\tau)]\,d\tau, \tag{5}$$

$$v_i=\frac{\eta^2}{(1-R)(1-\cos\alpha)}\int_{\tau_i}^{\tau_i+a} f(\tau)[(\cos\eta(\tau_i-\tau)-\cos\eta(\tau_i+a-\tau)]d\tau. \tag{6}$$

Ecuaţia (5) determină momentele τ_i ale ciocnirilor periodice, iar ecuaţia (6) viteza de ciocnire în funcţie de τ_i. Pentru existenţa mişcărilor periodice este necesar ca din ecuaţia (5) să rezulte valori reale pentru τ_i, iar din (6) valori pozitive pentru v_i.

Pentru existenţa mişcărilor periodice cu perioada $2\pi n$ mai este necesar ca în intervalul $(\tau_i, \tau_i+2\pi n)$ să nu apară ciocniri cu limitatorul, adică minimul cel mai mic al lui $z(\tau)$ în acest interval să fie mai mare sau la limită egal cu $-\delta$.

Aplicînd, pentru studiul stabilităţii mişcărilor periodice, metoda transformărilor punctuale [11], se obţine ecuaţia caracteristică

$$\beta^2+\left\{2R\cos\alpha+\frac{[\delta+f(\tau_i)]\eta(1+R)\sin\alpha}{v_i}\right\}\beta+R^2=0, \tag{7}$$

unde $\alpha=2\pi n\eta$. Pentru ca mişcările periodice să fie stabile, trebuie să fie verificate condiţiile

$$-\frac{1}{\eta}\frac{1+R^2+2R\cos\alpha}{1+R}\frac{v_i}{\sin\alpha}-f(\tau_i)<\delta<\frac{1}{\eta}\frac{1+R^2-2R\cos\alpha}{1+R}\frac{v_i}{\sin\alpha}-f(\tau_i). \tag{8}$$

3. PROPRIETĂŢILE MIŞCĂRILOR PERIODICE ÎN CAZUL EXCITAŢIEI ARMONICE ŞI DREPTUNGHIULARE

Pe baza rezultatelor obţinute în cazul general se vor studia în continuare mişcările periodice produse de excitaţia armonică [$f(\tau)=\sin\tau$] şi cea dreptunghiulară (fig. 2).

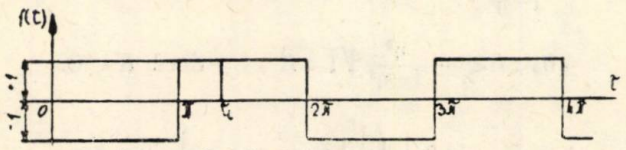


Fig. 2

În cazul excitaţiei armonice, ecuaţia (5) admite rădăcini reale în τ_i, dacă

$$\mp\frac{\eta^2}{1-\eta^2}\sqrt{1+K^2}<\delta<\pm\frac{\eta^2}{1-\eta^2}\sqrt{1+K^2}, \tag{9}$$

unde

$$K=\frac{1}{\eta}\frac{1+R}{1-R}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}. \tag{10}$$

Pentru ca viteza (6) să fie pozitivă, trebuie să fie verificate condiţiile

$$\delta<\pm\frac{\eta^2}{1-\eta^2}, \quad \text{dacă } K>0 \tag{11}$$

$$\delta>\mp\frac{\eta^2}{1-\eta^2}, \quad \text{dacă } K<0 \tag{12}$$

Punînd condiţia ca minimul cel mai mic al lui $z(\tau)$ în intervalul $(\tau_i, \tau_i+2\pi n)$ să fie egal cu $-\delta$, se obţine pentru δ o valoare limită δ_l, dată de ecuaţiile

$$\delta_l = \mp \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \frac{K-L}{\sqrt{1+L^2}} \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\gamma - \frac{2}{\eta}\frac{1+R}{1-R}\frac{\sin\eta\gamma/2}{\sin\pi n\eta}\sin\eta\left(\pi n - \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\gamma + \frac{1+R}{1-R}\frac{\sin\eta(\gamma-\pi n)}{\sin\pi n\eta}}, \tag{14}$$

unde

$$L = \frac{\frac{1+R}{1-R}\frac{\sin\eta(\gamma-\pi n)}{\sin\pi n\eta} + \cos\gamma}{\sin\gamma}. \tag{15}$$

Pentru existenţa mişcărilor periodice cu perioada $2\pi n$, trebuie să avem $\delta > \delta_l$, fiindcă în caz contrar apar ciocniri suplimentare.

În relaţiile (9)–(13) semnul de sus corespunde cazului $\eta<1$, iar semnul de jos pentru $\eta>1$.

Relaţiile (9)–(12) împreună cu sistemul (13), (14) determină domeniile de existenţă ale mişcărilor periodice.

Condiţiile de stabilitate (8) în cazul excitaţiei armonice devin

$$\mp\frac{\eta^2}{1-\eta^2}\sqrt{1+K^2} < \delta < \mp\delta_s, \qquad \text{dacă } K>0, \tag{16}$$

$$\pm\delta_s < \delta < \pm\frac{\eta^2}{1-\eta^2}\sqrt{1+K^2}, \qquad \text{dacă } K<0, \tag{17}$$

unde

$$\delta_s = \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{\eta^2}(1+R)^2-(1-R)^2\right]-(1+R)^2}{\sqrt{\left[(1-R^2)\frac{\sin\alpha}{2\eta}\right]^2+\left[(1-R)^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}+(1+R^2)\right]^2}}. \tag{18}$$

În fig. 3 este reprezentat pentru $n=1$ şi $R=0{,}6$ domeniul mişcărilor periodice stabile, delimitat de nişte curbe care corespund limitei de stabilitate (curbele notate cu s) sau limitei de existenţă (e, δ_l). Din diagramă se poate vedea că limita inferioară a domeniului pe o porţiune destul de mare este δ_l, deşi sub această curbă ar fi verificate condiţiile de existenţă şi de stabilitate.

În cazul excitaţiei dreptunghiulare (fig. 2), pentru existenţa mişcărilor periodice, trebuie să avem

$$\mp\left[\frac{\sqrt{\eta^2K^2+1}}{\cos\frac{\eta\pi}{2}}-1\right] < \delta < \pm\left[\frac{\sqrt{\eta^2K^2+1}}{\cos\frac{\eta\pi}{2}}-1\right], \tag{19}$$

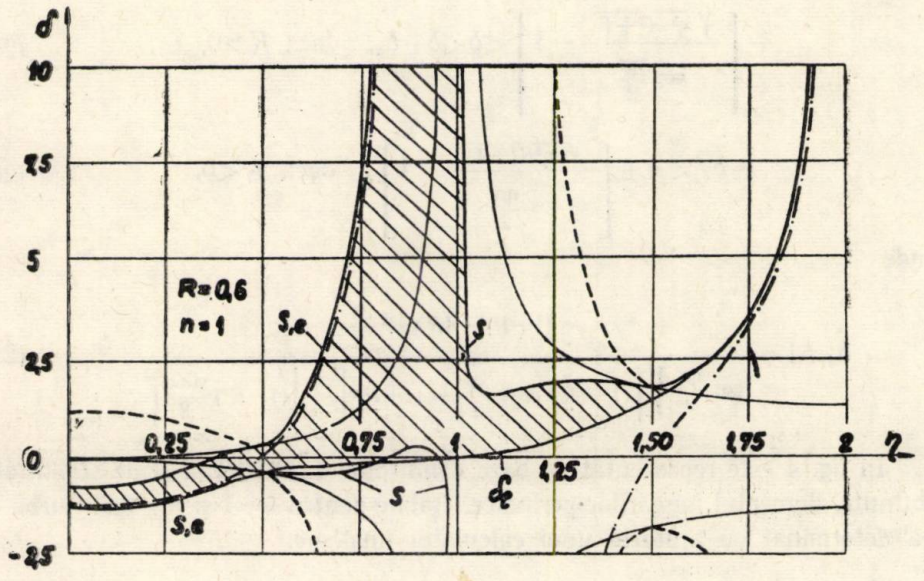


Fig. 3

și

$$-\frac{1+R}{1-R}\operatorname{tg}\frac{\eta\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}<\delta<\frac{1+R}{1-R}\operatorname{tg}\frac{\eta\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},\quad \text{dacă } \eta<\eta_1 \tag{20}$$

unde η_1 este rădăcina ecuației

$$\operatorname{tg}\frac{\eta\pi}{2}=\frac{1+R}{1-R}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}, \tag{21}$$

$$\delta<\mp\left(\frac{1}{\cos\frac{\eta\pi}{2}}-1\right),\quad \text{dacă } K>0, \tag{22}$$

$$\delta>\pm\left(\frac{1}{\cos\frac{\eta\pi}{2}}-1\right),\quad \text{dacă } K<0. \tag{23}$$

Semnul de sus corespunde cazului $\eta<1$, iar cel de jos pentru $\eta>1$.

Punînd condiția ca minimul cel mai mic al lui $z(\tau)$ în intervalul $(\tau_i, \tau_i+2\pi r)$ să fie mai mare sau la limită egal cu $-\delta$, în acest caz se obțin relații matematice relativ complicate. Mult mau ușor se determină limita δ_l pe baza legii de mișcare cu ajutorul unui calculator electronic.

Condițiile de stabilitate în cazul excitației dreptunghiulare sînt:

$$-\frac{1+R}{1-R}\operatorname{tg}\frac{\eta\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}<\delta<\delta_s,\quad \text{dacă } \eta\in(0,\eta_1), \tag{24}$$

$$\mp\left[\frac{\sqrt{\eta^2K^2+1}}{\cos\frac{\eta\pi}{2}}-1\right]<\delta<\delta\mp\delta_s, \quad \text{dacă } K>0, \tag{25}$$

$$\pm\delta_s<\delta\pm\left[\frac{\sqrt{\eta^2K^2+1}}{\cos\frac{\eta\pi}{2}}-1\right], \quad \text{dacă } K<0, \tag{26}$$

unde

$$\delta_s=1-\frac{(1+R)^2-4R\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\eta\pi}{2}\sqrt{\left[(1-R)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+(1+R)^2\right]^2+\left[(1-R^2)\frac{\sin\alpha}{2}\right]^2}}. \tag{27}$$

În fig. 4 este reprezentat pe baza condițiilor de existență și de stabilitate obținute, domeniul mișcărilor periodice, stabile pentru $n=1$ și $R=0{,}6$. Curba δ_l s-a determinat cu ajutorul unui calculator analogic.

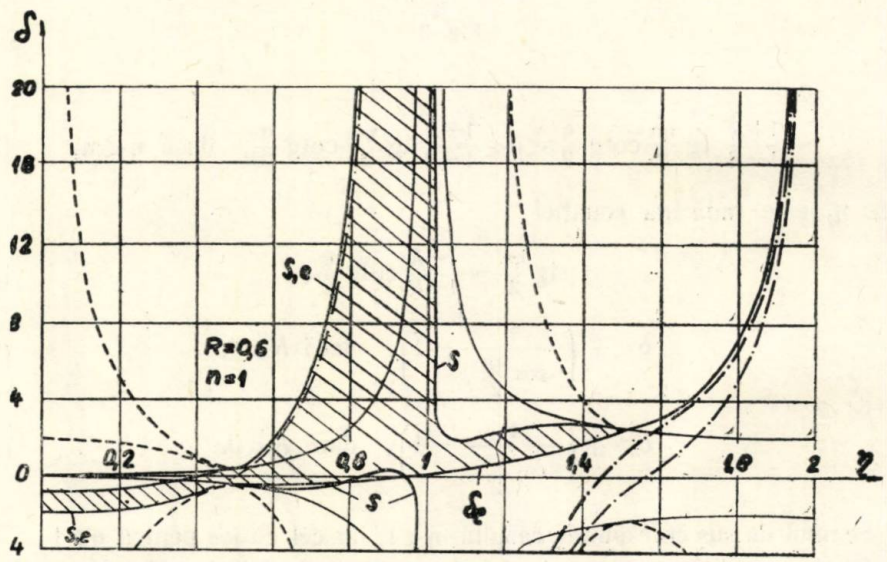


Fig. 4

În figurile 3 și 4 s-au reprezentat cu linie punctată și curbele corespunzătoare mișcărilor optime, pentru care viteza de ciocnire este maximă. Pentru $\eta>1$ aceste curbe sînt situate în afara domeniilor de existență ale mișcărilor periodice.

4. CONCLUZII

Comparînd între ele relaţiile matematice şi domeniile de existenţă şi de stabilitate obţinute în cele două cazuri, se poate constata că proprietăţile mişcărilor periodice produse de excitaţia armonică şi cea dreptunghiulară sînt asemănătoare. Astfel principalele proprietăţi ale mişcărilor periodice produse de excitaţia armonică pot fi extinse şi asupra mişcărilor produse de alte excitaţii periodice. De altfel pe baza rezultatelor date în paragraful 2 se pot determina parametrii mişcărilor periodice, condiţiile de existenţă şi de stabilitate ale acestora pentru orice excitaţie periodică.

BIBLIOGRAFIE

1. Беспалова Л.В., К теории виброударного механизма. Изв. АН СССР, ОТН, 1957 № 5.
2. Баркан Д.Д., *Виброметод в строительстве.* Москва, 1959 г.
3. Sachse R., Reum G., Beiträge Zur des Theorie des Kurbel-Feder-Hammers. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt. Jahrgang VII, 1965, Heft 2.
4. Silaş Gh., Hegedüs A., Studiul mişcărilor periodice ale unui mecanism vibropercutant cu un grad de libertate. Buletinul ştiinţific şi tehnic al I. P. T., Tom. 11, fasc. 2, 1966.
5. Kowalczyk B., Badanie stabilnasci strukturalnej ukladu wibro-uderzeniowego o jednym stopniu swobody. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdanskiej, Mechanika IX, 1967, Nr. 112.
6. Silaş Gh. Brîndeu L., Stabilitatea mişcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant, cu un grad de libertate în cazul ciocnirilor instantanee elastice. Buletinul ştiinţific şi tehnic al I. P. T., tom. 14, fasc. 1, 1969.
7. Fu C. C., Paul B., Dynamic Stability of a Vibrating Hammer. Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry, November 1969.
8. Silaş Gh., Hegedüs A., Contribuţii privind studiul mişcărilor periodice optime ale sistemelor vibropercutante cu un grad de libertate. Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T, seria I, mat. fiz. mec. teoretică şi aplicată, Tom. 16 (30), fasc. 1., 1971.
9. Брунштейн Р. Е., Динамика и устойчивость виброударной системы находящейся под воздействием произвольной периодической силы Механика машин, вып. 25—26 Изд. «Наука», Москва, 1970.
10. Хегедуш А., Петерка Ф., Движение виброударной системы с одной степенью свободы при прямоугольном возбуждении. VII Конференция Динамики Машин, Польша—Гливице, 1971 г. Сборник докладов I.
11. Hegedüs A., Contribuţi privind studiul mişcărilor vibropercutante optime în sisteme mecanice şi electromecanice. Teză de doctorat. Institutul politehnic Timişoara. 1971.

В СВЯЗИ С ВИБРОУДАРНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ ПРОИЗВЕДЕННЫМИ ГАРМОНИЧЕСКИМ И ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

(РЕЗЮМЕ)

В работе дается сопостовимое исследование свойств периодических движений произведенных гармоническим и прямоугольным возбуждением в виброударной системе с одной степенью свободы. Определяются условия существования и устойчивости данных движений.

Из данного исследования выясняется что периодические движения произведенные двумя вышеупомянутыми возбуждениями обладают многими общими характеристиками, так что основные свойства движений произведенных гармоническими возбуждением могут быть распространены и на движения произведенные другими периодическими возбуждениями.

ÜBER DIE PERIODISCHEN STOSSSCHWINGUNGEN WELCHE DURCH HARMONISCHE UND RECHTECKFÖRMIGE ERREGUNG ERZEUGT WERDEN

(ZUSAMMENFASSUNG)

Im Beitrag wird ein vergleichendes Studium der Eigenschaften der periodischen Bewegungen gemacht, welche durch harmonische bzw. rechteckförmige Erregung eines Stossschwingers mit einem Freiheitsgrad entstehen. Es werden die Existenz- und Stabilitätsbedingungen dieser Bewegungen bestimmt.

Aus dem Studium folgt, dass die periodischen Bewegungen, welche durch diese zwei Erregungen erzeugt werden, viele gemeinsame Eigenschaften besitzen, sodass die wesentlichsten Eigenschaften der durch die harmonische Erregung erzeugten Bewegungen auch auf Bewegungen, welche durch andere periodische Erregungen erzeugt werden, ausgedehnt werden können.

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIŞOARA

SERIA
MATEMATICĂ — FIZICĂ — MECANICĂ
TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tomul 19 (33) Fascicola 2

IULIE — DECEMBRIE
1974

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. doc. ing. GH. SILAȘ (redactor șef), acad, prof. dr. doc. ing. I. ANTON, prof. em. ing. C. AVRAM, m.c. al Academiei R.S.R., prof. dr. ing. M. BORNEAS, prof. dr. ing. M. BRAȘOVAN, prof. dr. ing. V. COCHECI, acad. prof. dr. doc. C. DRĂGULESCU, prof. dr. O. EM. GHEORGHIU, prof. ing. V. GHEORGHIU, prof. dr. ing. GH. SAVII, acad. prof. ing. D. MATEESCU, prof dr. ing. I. NOVAC.

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. dr. O. EM. GHEORGHIU (redactor șef), prof. dr. ing. M. BORNEAS, (redactor responsabil adjunct), prof. em. dr. doc. ing. GH SILAȘ, prof. dr. B. CRISTICI, prof. dr. C. SIMOIU, conf. dr. ing. I. GROȘANU și conf. dr. ing. L. BRÎNDEU (secretar de redacție).

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA
SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ-MECANICĂ TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tom 19(33) Fasc. 2 Iulie-Decembrie 1974

SUMAR

1. H. SASAYAMA : Asupra generalizării abstracte a spaţiilor jet pentru varietăţi cu coordonate topologice liniare II 111
2. H. BASTIN, M. DELCHAMBRE : Exemple numerice de cuplare a unui oscilator neliniar forţat şi a unui oscilator liniar liber 121
3. M. E. L. VANDEWIELE : Asupra unei ecuaţii Mathiu 133
4. O. Em. GHEORGHIU : Asupra unei ecuaţii funcţionale ciclice neliniare 141
5. J. TÄUBER : O clasă specială de loopuri slabe (II) 145
6. M. BORNEAS, M. DAVID, I. MIRON, MINERVA CRISTEA, I. DAMIAN : Asupra tranziţiilor cuantice ale oscilatorului armonic generalizat 149
7. MINERVA CRISTEA : Transformări fizice în sistemul oxizilor izomorfi α-Fe_2O_3—Al_2O_3—Cr_2O_3 153
8. C. SIMOI : Înregistrarea frecvenţelor proprii ale unui rezonator cu ajutorul forţelor undostatice 159
9. P. CRĂCIUN : Emisia electronică stimulată a suprafeţelor de aluminiu impurificate 161
10. L. E. KRIVOSEIN, D. MANGERON, M. N. OGUZTORELI, GH. SILAS : Probleme complexe posedînd structura complexă. VI. Cercetarea soluţiilor unor sisteme integro-diferenţiale neliniare cu operatori parabolici supuse la condiţii iniţiale 165
11. GH. SILAS, L. BRÎNDEU, V. BACRIA : Regimuri periodice de mişcare ale unui sistem vibropercutant în ipoteza existenţei frecării interne 173
12. L. BRÎNDEU : Folosirea calculului operaţional în studiul mişcărilor periodice ale sistemului vibropercutant cu un grad de libertate şi o cuplă percutantă 177
13. I. GROSANU : Stdiul regimurilor staţionare ale unui vibrator folosit pentru înfigerea piloţilor în sol 183
DOINA BECHERESCU : Determinarea mişcărilor periodice cu ciocniri plastice ale unei particule pe o platformă vibrantă cînd contactul este instantaneu 187
15. I. GROSANU, A. CHIRIAC : Determinarea benzii de stabilitate a unui agregat 193

BULLETIN SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
DE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE „TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA

SÉRIE MATHEMATIQUE-PHYSIQUE-MÉCANIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUEÉ

Tome 19(33) Fasc. 2 Juillet-Decembre, 1974

SOMMAIRE

1. H. SASAYAMA : On the Abstract Generalization of Jet-Spaces for Manifolds with Linear Topological Coordonates II 111
2. H. BASTIN, M. DELCHAMBRE : Exemples numeriques de couplages d'un oscillateur non linéaire forcé et d'un oscillateur linéare libre 121
3. M. E. L. VANDERWIELE : Sur une équation non linéaire de Mathieu 133
4. O. Em. GHEORGHIU : Sur une équation fonctionelle cyclique non linéaire 141
5. J. TÄUBER : Eine spezielle Klasse von schwachen Loops II. 145
6. M. BORNEAS, M. DAVID, I. MIRON, MINERVA CRISTEA, I. DAMIAN : Contributions to the Quantum Transitions of the Generalized Harmonic Oscillator 149
7. MINERVA CRISTEA : Physical Charges in the System of the Isomorphous Oxides α-Fe_2O_3—Al_2O_3—Cr_2O_3 153
8. C. SIMOI : L'enregistrement des frécuences propres d'un résonateur à l'aide des forces ondostatiques 159
9. O. CRĂCIUN : Stimulated Electron Emission of Impurified Aluminium Surfaces 161
10. L. E. KRIVOCHEIN, D. MANGERON, M. N. OGUZTORELI, GH. SILAS : Problemes différentials possedant la structure complexe VI. Recherche des solutions soumises aux conditions initiales concernant certaines systéms integro-differentials non linéaires aux opérateur paraboliques 165
11. GH. SILAS, L. BRÎNDEU, V. BACRIA : Periodische Bewegungsregimes eines Stossschwingers in der Vorrausetzung dass innenreibung vorhanden ist 173
12. L. BRÎNDEU : Die Verwendung der Operatorenrechnung beim Studium der periodischen Bewegungen der Stosschwinger mit einem Freiheitsgrad und einem Stosspar 177
13. I. GROSANU : Contributions to the Analysis of Steady-states of a Vibrator Used for Pile Thrusting 183
14. DOINA BECHERESCU : Die Untersuchung der periodischen Bewegungen mit plastichem Aufprall eines Platform hervorgerufen werden, wobei die Berührung plötzlich ist 187
15. I.GROSANU, A. CHIRIAC : La determination de la bande de stabilité d'un agregat 193

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ БЮЛЛЕТЕНЬ
ТИМИШОАРСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. «ТРАЯН ВУЯ»
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА-ФИЗИКА-ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
Том 19(33) Выпуск II. Июль декабрь 1974 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Х. САСАЯМА, К абстрактному обобщению пространств-струй на разновидностях с топологическими линейными координатами II 111
2. Х. БАСТЕН, М. ДЕЛЬШАМБР, Численные примеры сцепления нелинейного вынужденного осциллятора с линейным свободным осциллятором. 121
3. М. Е. И. ВАНДЕВИЛЕ, В связи с нелинейным уравнением Матье. 133
4. О. Ем. ГЕОРГИУ, В связи с функциональным циклическим нелинейным уравнением 141
5. Ж. Е. ТАУБЕР, Специальный класс слабых лупов II. 145
6. М. БОРНЕАС, М. ДАВИД, И. МИРОН, МИНЕРВА КРИСТЕА, И. ДАМИАН, К квантовым преходам обобщенного гармонического осциллятора 149
7. МИНЕРВА КРИСТЕА, Физические превращения в системе изоморфных окислом $\alpha-Fl_2O_3-Al_2O_3-Cr_2O_3$ 153
8. К. СИМОИ, Регистрация собственных частот резонатора при волностатических сил 159
9. П. КРЭЧУН, Стимулированная электронная алюминьевых примесных поверхностей 161
10. Л. Е. КРИВОШЕИН, Д. МАНЖЕРОН, М. Н. ОГЮЗТОРЕЛИ, Дифференциальные задачи сложной структуры. VI. Решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параболическими операторами при начальных условиях 165
11. Г. СИЛАШ, Л. БРЫНДЕУ, В. БАКРИЯ, Периодические режимы движения выброударной системы в предложении внутреннего трения 173
12. Л. БРЫНДЕУ, Использование операционального расчета в исследований периодических движений виброударной системы с одной степенью свободы и ударной парой 177
13. И. ГРОШАНУ, Исследование стационарных режимов вибратора употребляемого для свай в грунт. 183
14. ДОИНА БЕКЕРЕСКУ, Определение периодических движений с пластичными соударениями некоторой частицы, произведение вибрирующей площадкой при мгновенном контакте 187
15. И. ГРОШАНУ, А. КИРИЯК, Определение полосы устойчивости агрегата 193

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

ON THE ABSTRACT GENERALIZATION OF JETSPACES FOR MANIFOLDS WITH LINEAR TOPOLOGICAL COORDINATES II. COORDINATE TRANSFORMATIONS IN ABSTRACT JET-SPACES, COMPOSITION OF ABSTRACT INFINITESIMAL JETS AND THE GROUP OF ABSTRACT INFINITESIMAL ISOTROPY

By

HIROYOSHI SASAYAMA
The Sasayama Institute, Japan.

This paper is a sequel to the previous paper I (this Bulletin, Tom 19(33), fasc 1/1974).

In the present paper, we shall obtain the equations for the coordinate transformations in the bundle space $J^m(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ of abstract infinitesimal m — jets and give the explicit forms for local representation of composition of our abstract infinitesimal jets and for the coordinate representation of the multiplication in the group of infinitesimal isotropy by applying the present author's generalization of A. Fais', R. Hoppe's and Vaà di Bruno's formulae.

The coordinate transformation in the abstract jetbundle $J^m(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ is given by the following equations under $\overline{\mathbf{X}}=\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ in $\mathfrak{M}$, $\overline{\mathbf{X}}'=\overline{\mathbf{X}}'(\mathbf{X}')$ in $\mathfrak{M}'$:

$$d^r_{\overline{\mathbf{X}}}\,\overline{\mathbf{F}}(\overline{\mathbf{X}}_0;\xi;\ldots;\xi)\equiv[d^r_{\mathbf{X}}(;\xi;\ldots;\xi)\,\overline{\mathbf{X}}'(\widetilde{\mathbf{F}}(\overline{\mathbf{X}}))]_{\overline{\mathbf{X}}=\overline{\mathbf{X}}_0}=$$

$$=\sum_{p=1}^{r}\frac{r!}{p!}\sum_{1\leqq r_1,\ldots,r_p\leqq r;r_1+\ldots+r_p=r}\sum_{l_1=1}^{r_1}\cdots$$

$$\cdots\sum_{l_p=1}^{r_p}\frac{1}{l_1!\ldots l_p!}\sum_{1\leqq {}^{s}_{(1)}1,\ldots,{}^{s}_{(1)}l_1\leqq r_1;\,{}^{s}_{(1)}1+\ldots+{}^{s}_{(1)}l_1=r_1}\cdots$$

$$\cdots\sum_{1\leqq {}^{s}_{(p)}1,\ldots,{}^{s}_{(p)}l_p\leqq r_p;\,{}^{s}_{(p)}1+\ldots+{}^{s}_{(p)}l_p=r_p}\prod_{u=1}^{p}\frac{1}{{}^{s}_{(u)}1!\ldots{}^{s}_{(u)}l_u!}\,d^p_{\mathbf{X}'}\overline{\mathbf{X}}'(\mathbf{F}(\mathbf{X}_0);$$

$$d^{l_1}_{(\overline{\mathbf{X}})}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0\,;\,d^{s}_{(\overline{1})^1}\overline{\mathbf{X}}_0\,;\,\ldots\,;\,d^{s}_{(\overline{1})^{l_1}}\overline{\mathbf{X}}_0)\,;\ldots;\,d^{l_p}_{\overline{\mathbf{X}}}\,\mathbf{F}(\mathbf{X}_0\,;\,d^{s}_{(\overline{p})^1}\overline{\mathbf{X}}_0\,;\,\ldots\,;\,d^{s}_{(\overline{p})^{l_p}}\overline{\mathbf{X}}_0)) \quad (2.1)$$

where

$$d^{s}_{\overline{\mathbf{X}}}\,\overline{\mathbf{X}}_0 \equiv d^{s}_{\overline{\mathbf{X}}}\,\overline{\mathbf{X}}(\overline{\mathbf{X}}_0\,;\,\xi\,;\,\ldots\,;\,\xi)$$

and

$$\tilde{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{\mathbf{X}}) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{X}(\overline{\mathbf{X}})).$$

When $\mathbf{B}=R^n$, the coordinate transformation in $J^m(\mathfrak{M},\,\mathfrak{M}')$ becomes as follows:

$$\left[\frac{\partial^r \overline{\mathbf{F}}(\overline{x}_1,\,\ldots,\,\overline{x}_n)}{\partial\overline{x}_1^{a_1}\ldots\partial\overline{x}_n^{a_n}}\right]_{\overline{x}_i=\overset{\circ}{\overline{x}}_i\,(i=1,\,\ldots,\,n)} \equiv \left[\frac{\partial^r}{\partial\overline{x}_1^{a_1}\ldots\partial\overline{x}_n^{a_n}}\,\overline{\mathbf{X}}'(\tilde{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{x}_1,\,\ldots,\,\overline{x}_n))\right]_{\overline{x}_i=\overset{\circ}{\overline{x}}_i(i=1,\,\ldots,\,n)} =$$

$$= \sum_{p=1}^{r}\frac{1}{p\,!}\sum_{1\leqq l_1,\,\ldots,\,l_p\leqq r\,:\,l_1+\ldots+l_p=r}\;\sum_{0\leqq {}^{l}_{(s)}i\leqq {}^{l}_{(s)}{}^{1}+\ldots+{}^{l}_{(s)}{}^{n}=l_s\,;\;{}^{l}_{(1)}i+\ldots+{}^{l}_{(p)}i=a_i\;(i=1,\,\ldots,\,n;s=1,\,\ldots,\,p)}\frac{a_1\,!}{{}^{l}_{(1)}1\,!\ldots{}^{l}_{(p)}1\,!}\cdots$$

$$\cdots\frac{a_n\,!}{{}^{l}_{(1)}n\,!\ldots{}^{l}_{(p)}n\,!}\;d^p\overline{\mathbf{X}}'\left(\mathbf{X}'_0;\;\left[\frac{\partial^{{}^{l}_{(1)}1+\ldots+{}^{l}_{(1)}n}\,\tilde{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{x}_1,\,\ldots,\,\overline{x}_n)}{\partial\overline{x}_1^{{}^{l}_{(1)}1}\cdots\partial\overline{x}_n^{{}^{l}_{(1)}n}}\right]_{\overline{x}_1=\overset{\circ}{\overline{x}}_1,\,\ldots,\,\overline{x}_n=\overset{\circ}{\overline{x}}_n};\;\ldots\right.$$

$$\left.\ldots;\;\left[\frac{\partial^{{}^{l}_{(p)}1+\ldots+{}^{l}_{(p)}n}\,\tilde{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{x}_1,\,\ldots,\,\overline{x}_n)}{\partial\overline{x}_1^{{}^{l}_{(p)}1}\cdots\partial\overline{x}_n^{{}^{l}_{(p)}n}}\right]_{\overline{x}_1=\overset{\circ}{\overline{x}}_1,\,\ldots,\,x_n=\overset{\circ}{\overline{x}}_n}\right)$$

where $a_1+\ldots+a_n=r$,

$$\tilde{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{x}_1,\,\ldots,\,\overline{x}_n)\equiv\mathbf{F}(x_1(\overline{x}_1,\,\ldots,\,\overline{x}_n),\,\ldots,\,x_n(\overline{x}_1,\,\ldots,\,\overline{x}_n)),$$

$$\overset{\circ}{\overline{x}}_i\equiv\overline{x}_i(\overset{\circ}{x}_1,\,\ldots,\,\overset{\circ}{x}_n)(i=1,\,\ldots,\,n),$$

$$\mathbf{X}'_0\equiv\tilde{\overline{\mathbf{F}}}(\overset{\circ}{\overline{x}}_1,\,\ldots,\,\overset{\circ}{\overline{x}}_n)=\mathbf{F}(\overset{\circ}{x}_1,\,\ldots,\,\overset{\circ}{x}_n).$$

But, $\tilde{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{x}_1,\,\ldots,\,\overline{x}_n)_0^{\overline{(l_1,\,\ldots,\,l_n)}} \equiv \left[\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}\,\tilde{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{x}_1,\,\ldots,\,\overline{x}_n)}{\partial\overline{x}_1^{l_1}\ldots\;\ldots\partial\overline{x}_n^{l_n}}\right]_{\overline{x}_1=\overset{\circ}{\overline{x}}_1,\,\ldots,\,x_n=\overset{\circ}{\overline{x}}_n}$

are given by

$$\left[\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}\tilde{\overline{\mathbf{F}}}(\overline{x}_1,\,\ldots,\,\overline{x}_n)}{\partial\overline{x}_1^{l_1}\cdots\partial\overline{x}_n^{l_n}}\right]_{\overline{x}_1=\overset{\circ}{\overline{x}}_1,\,\ldots,\,\overline{x}_n=\overset{\circ}{\overline{x}}_n} =$$

$$= \left[\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial \bar{x}_1^{l_1} \ldots \partial \bar{x}_n^{l_n}} \mathbf{F}(\bar{x}_1(\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_n), \ldots . x_n(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)) \right]_{x_1=\underset{o}{x}_1, \ldots, x_n=\underset{o}{x}_n} =$$

$$= \sum_{p'=1}^{l_1+\ldots+l_n} \sum_{0 \leqq l'_1, \ldots, l'_n \leqq p' : l'_1+\ldots+l'_n=p'} \mathbf{F}_0^{(l'_1, \ldots, l'_n)} \left[\overline{\mathfrak{A}}^{l_1, \ldots, l_n}_{l'_1, \ldots, l'_n} \right]_{(\underset{o}{x}_1, \ldots, \underset{o}{x}_n)}$$

where

$$\mathbf{F}_0^{(l_1, \ldots, l_n)} \equiv \left[\frac{\partial \mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} \right]_{x_1=\underset{o}{x}_1, \ldots, x_n=\underset{o}{x}_n}$$

and

$$\overline{\mathfrak{A}}^{l_1, \ldots, l_n}_{0, \ldots, 0} \equiv 0 \quad (p'=0),$$

$$\left[\overline{\mathfrak{A}}^{l_1, \ldots, l_n}_{l'_1, \ldots, l'_n} \right] \equiv \sum_{p_1=0}^{l'_1} \ldots \sum_{p_n=0}^{l'_n} \frac{\binom{l'_1}{p_1}}{l'_1!} \ldots \frac{\binom{l'_n}{p_n}}{l'_n!} \cdot (-x_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^{l'_1-p_1} \ldots$$

$$\ldots (-x_n(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^{l'_n-p_n} \cdot \frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial \bar{x}_1^{l_1} \ldots \partial \bar{x}_n^{l_n}} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^{p_i} \right) \quad (2.2)$$

$$(l'_1+\ldots+l'_n=p'; 0 \leqq l'_1, \ldots, l'_n \leqq p'; 1 \leqq p' \leqq l_1+\ldots+l_n).$$

Putting into the above expressions, we get

$$\left[\frac{\partial^r \bar{\mathbf{F}}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial \bar{x}_1^{a_1} \ldots \partial \bar{x}_n^{a_n}} \right]_{(\underset{o}{x}_1, \ldots, \underset{o}{x}_n)} = \sum_{p=1}^{r} \frac{1}{p!} \cdot \sum_{1 \leqq l_1, \ldots, l_p \leqq r : l_1+\ldots+l_p=r} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{0 \leqq \overset{l}{(s)}_i \leqq \overset{l}{(s)}_1 : \overset{l}{(s)}_1+\ldots+\overset{l}{(s)}_n=l_s, \overset{l}{(1)}_i+\ldots+\overset{l}{(p)}_i=a_i \\ (i=1, \ldots, n; s=1, \ldots, p)}} \frac{a_1!}{\overset{l}{(1)}_1! \ldots \overset{l}{(p)}_1!} \ldots \frac{a_n!}{\overset{l}{(1)}_n! \ldots \overset{l}{(p)}_n!} \cdot$$

$$\cdot \sum_{u_1=1}^{\overset{l}{(1)}_1+\ldots+\overset{l}{(1)}_n} \ldots \sum_{u_p=1}^{\overset{l}{(p)}_1+\ldots+\overset{l}{(p)}_n} \cdot \sum_{1 \leqq \overset{l'}{(1)}_1, \ldots, \overset{l'}{(1)}_n \leqq u_1 : \overset{l'}{(1)}_1+\ldots+\overset{l'}{(1)}_n=1} \ldots$$

$$\ldots \sum_{1 \leqq \overset{l'}{(p)}_1, \ldots, \overset{l'}{(p)}_n \leqq u_p : \overset{l'}{(p)}_1+\ldots+\overset{l'}{(p)}_n=u_p} \cdot d^p \bar{\mathbf{X}}'(\mathbf{X}'_0; \mathbf{F}_0^{(\overset{l'}{(1)}_1, \ldots, \overset{l'}{(1)}_n)} \cdot$$

$$\cdot \left[\overline{\mathfrak{A}}^{\overset{l}{(1)}_1, \ldots, \overset{l}{(1)}_n}_{\overset{l'}{(1)}_1, \ldots, \overset{l'}{(1)}_n} \right]_{(\underset{o}{x}_1 \ldots, \underset{o}{x}_n)} ; \ldots . \mathbf{F}_0^{(\overset{l'}{(p)}_1, \ldots, \overset{l'}{(p)}_n)} \cdot \left[\overline{\mathfrak{A}}^{\overset{l}{(p)}_1, \ldots, \overset{l}{(p)}_n}_{\overset{l'}{(p)}_1, \ldots, \overset{l'}{(p)}_n} \right]_{(\underset{o}{x}_1, \ldots, \underset{o}{x}_n)} \Bigg) \cdot \quad (2.3)$$

Let $\mathfrak{M}''$ be the 3-rd abstract differentiable manifold with the coordinate Banach space $\mathbf{B}''$.

For elements $f\in C^m_{P_0}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, $g\in C^m_{f(P_0)}(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'')$, we have the composition $g\circ f\in C^m_{P_0}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'')$.

This composition law induces the laws of composition between two abstractly generalized infinitesimal jets of order m and between a mapping of class C^m and an abstractly generalized m-jet as follows:

$$j^m_{P_0}(g\circ f)\equiv (j^m_{f(P_0)}g)\circ(j^m_{P_0}f)=g\circ(j^m_{P_0}f). \tag{2.4}$$

When f is a mapping of a neighborhood $\mathfrak{U}$ of $P_0\in\mathfrak{M}$ into $\mathfrak{M}'$ and g is a mapping of an neighborhood $\mathfrak{V}$ of $f(P_0)\in\mathfrak{M}'$ into $\mathfrak{M}''$ which are expressed as

$$f:\mathbf{X}'=\mathbf{F}(X),\qquad g:\mathbf{X}''=\mathbf{G}(\mathbf{X}')$$

in the admissible local coordinate systems χ, χ', χ'' in $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ respectively and $\chi(P_0)=\mathbf{X}_0$, $\chi'(f(P_0))\equiv\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)=\mathbf{X}'_0$, $\chi''(g(f(P_0)))=\mathbf{X}''_0=\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{X}_0))$, the local coordinates of abstractly generalized infinitesimal jets $j^m_{P_0}f$, $j^m_{f(P_0)}g$ are given by the sets of functionals in ξ, η:

$$\underset{(r)}{a}(\xi)\equiv d^r_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi;\ldots;\xi)\quad(r=0,\ldots,m),$$

$$\underset{(s)}{b}(\eta)\equiv d^s_{\mathbf{X}'}\mathbf{G}(\mathbf{X}'_0;\eta;\eta)\quad(s=0,\ldots,m)$$

respectively, where $\xi\in\mathbf{B}$, $\eta\in\mathbf{B}'$ be arbitrary constant elements belonging to certain suitable neighborhoods of the zero elements.

Then, by the present author's generalization of A. Fais' formula, the local coordinates of $j^m_{P_0}(g\circ f)$ are given by

$$[d^r_{\mathbf{X}}(;\xi;\ldots;\xi)\ \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{X}))]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0}=\sum_{p=1}^{r}\frac{1}{p!}\sum_{1\leqq r_1,\ldots,r_p\leqq r;\,r_1+\ldots+r_p=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_p!}\cdot$$

$$\cdot d^p_{\mathbf{X}'}\mathbf{G}(\mathbf{X}'_0;d^{r_1}_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi;\ldots;\xi);\ldots;d^{r_p}_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi;\ldots;\xi))=$$

$$=\begin{vmatrix}
\partial_{\mathbf{X}'}(;d_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi)), & -1 & \\
\partial_{\mathbf{X}'}(;d^2_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi;\xi)), & \partial_{\mathbf{X}'}(;d_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi)), & \\
\partial_{\mathbf{X}'}(;d^3_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi;\xi;\xi))/2!, & \partial_{\mathbf{X}'}(;d^2_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi;\xi)), & \\
\vdots & \vdots & \\
\frac{1}{(m-2)!}\partial_{\mathbf{X}'}(;d^{m-1}_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi;\xi;\xi)), & \frac{1}{(m-3)!}\partial_{\mathbf{X}'}(;d^{m-2}_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi;\ldots;\xi)), & \\
\frac{1}{(m-1)!}\partial_{\mathbf{X}'}(;d^m_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi;\ldots;\xi)), & \frac{1}{(m-2)!}\partial_{\mathbf{X}'}(;d^{m-1}_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0;\xi;\ldots;\xi)), &
\end{vmatrix},$$

$$
\begin{array}{llll}
 & 0 & , & 0 \quad , \quad \dots \\
 & -2 & , & 0 \quad , \quad \dots \\
\partial_{\mathbf{X}'}(\,;\, d_{\mathbf{X}}\,\mathbf{F}(\mathbf{X}_0\,;\,\xi)) & & , & -3 \quad , \quad \dots \\
 & \vdots & & \vdots \\
\frac{1}{(m-4)\,!}\,\partial_{\mathbf{X}'}(\,;\, d_{\mathbf{X}}^{m-3}\,\mathbf{F}(\mathbf{X}_0\,;\,\xi\,;\,\dots\,;\,\xi)), & & \frac{1}{(m-5)\,!}\,\partial_{\mathbf{X}'}(\,;\, d_{\mathbf{X}}^{m-4}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0\,;\,\xi\,;\dots;\,\xi)), & \dots \\
\frac{1}{(m-3)\,!}\,\partial_{\mathbf{X}'}(\,;\, d_{\mathbf{X}}^{m-2}\,\mathbf{F}(\mathbf{X}_0\,;\,\xi\,;\,\dots\,;\,\xi)), & & \frac{1}{(m-4)\,!}\,\partial_{\mathbf{X}'}(\,;\, d_{\mathbf{X}}^{m-3}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0\,;\,\xi\,;\,\dots\,;\,\xi)), & \dots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll|l}
\dots, & 0 & , & 0 & \\
\dots, & 0 & , & 0 & \\
\dots, & 0 & , & 0 & \cdot\,\mathbf{G}\,(\mathbf{X}'(\mathbf{X}'')) \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\dots, & \partial_{\mathbf{X}'}(\,;\, d_{\mathbf{X}}\,\mathbf{F}(\mathbf{X}_0\,;\,\xi)), & & 1-m & \\
\dots, & \partial_{\mathbf{X}'}((\,;\, d_{\mathbf{X}}^2\,\mathbf{F}(\mathbf{X}_0\,;\,\xi\,;\,\xi) & & \partial_{\mathbf{X}'}(\,;\, d_{\mathbf{X}}\,\mathbf{F}(\mathbf{X}_0\,;\,\xi)) &
\end{array}
\Bigg|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0,\\ \mathbf{X}'=\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)}} \qquad (2.5)
$$

In particular, when $\mathfrak{M}'$ is n-dimensional i.e. $\mathbf{B}'=R^n$, the local coordinates of $j^m_{P_0} f$, $j^m_{f(P_0)} g$ become

$$\{d^r F_i(\mathbf{X}_0\,;\,\xi\,;\,\dots\,;\,\xi)\ (i=1,\dots n;\ r=0,\dots,m)\},$$

$$\left\{\left[\frac{\partial^s \mathbf{G}(y_1,\dots,y_n)}{\partial y_1^{s_1}\dots\partial y_n^{s_n}}\right]_{y_1=\overset{\circ}{y}_1,\dots,y_n=\overset{\circ}{y}_n}\ (s_1+\dots+s_n=s,\ s=0,\dots,m)\right\}$$

respectively where the local expressions of f, g be $y_i=F_i(\mathbf{X})(i=1,\dots,n)$, $\mathbf{X}'=\mathbf{G}(y_1,\dots,y_n)$ respectively.

Hence, in this case, from the present author's abstract generalizations of Vaà di Bruno's formula and of *R.* Hoppe's formula, the local coordinates of $j^m_{P_0}(g\circ f)$ are given by

$$[d^r\,(\,;\,\xi\,;\,\dots\,;\,\xi)\ \mathbf{G}(F_1(\mathbf{X}),\dots,F_n(\mathbf{X}))]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0} =$$

$$=r!\sum_{p=1}^{r}\ \sum_{0\leqq l_1,\dots,l_n\leqq p;\, l_1+\dots+l_n=p}\left[\frac{\partial^p\,\mathbf{G}(y_1,\dots,y_n)}{\partial y_1^{l_1}\cdots\partial y_n^{l_n}}\right]_{y_i=\overset{\circ}{y}_i\equiv F_i\,(\mathbf{X}_0)\,(l=1,\dots.n)}\cdot$$

$$\cdot\sum_{0\leqq {}^{s}_{(j)}1,\dots,{}^{s}_{(j)}r\leqq l_j;\ \sum_{a=1}^{r}{}^{s}_{(j)}a=l_j(j=1,\dots,n)}\ \prod_{a=1}^{r}\prod_{k=1}^{n}{}^{a}_{(k)}{}^{s}a=r\cdot$$

$$\cdot \prod_{h=1}^{n} \prod_{b=1}^{r} (d^b F_h(\mathbf{X}_0; \xi; \ldots; \xi)/b!)^{\binom{s}{(h)}{}^b} \Big/ {}_{\binom{s}{(h)}{}^b}! =$$

$$= \sum_{p=1}^{r} \frac{1}{p!} \sum_{0 \leqq l_1, \ldots, l_n \leqq p; l_1 + \ldots + l_n = p} \binom{p}{l_1, \ldots, l_n} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\partial^p \mathbf{G}(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_1^{l_1} \ldots \partial y_n^{l_n}} \right]_{y_i = \overset{\circ}{y}_i \equiv F(\mathbf{X}_0)\ (i=1, \ldots, n)} \sum_{r_1=0}^{l_1}{}' \cdots$$

$$\cdots \sum_{r_n=0}^{l_n}{}' \prod_{j=1}^{n} \binom{l_j}{r_j} (-y_j(\mathbf{X}_0))^{l_j - r_j} [d_{\mathbf{X}}^{r}(; \xi; \ldots; \xi)(y_1(\mathbf{X})^{r_1} \ldots y_n(\mathbf{X})^{r_n}]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0}. \quad (2.6)$$

The mapping μ_m^l of $J^m(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ onto $J^l(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ $(0 \leqq l \leqq m)$ is compatible with the composition law among abstract jets.

Now, we shall consider the totality $L^m(\mathbf{B}, \mathbf{B}')$ of elements of $J^m(\mathbf{B}, \mathbf{B}')$ such that the sources and the targets coincide with the zer-elements of $\mathbf{B}$ and of $\mathbf{B}'$ respectively i.e.

$$L^m(\mathbf{B}, \mathbf{B}') \equiv \{j_0^m f \in J_0^m(\mathbf{B}, \mathbf{B}') : f(0) = 0\}.$$

Then, by multiplication of jets, the product

$$L^m(\mathbf{B}, \mathbf{B}') \times L^m(\mathbf{B}', \mathbf{B}'') \to L^m(\mathbf{B}, \mathbf{B}'')$$

is determinned for three Banach spaces $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}''$.

All $\mathbf{X} \in L^m(\mathbf{B}, \mathbf{B}')$ is a m-jet of the source 0 of a mapping determined in the following form:

$$y = a_1(x) + \frac{1}{2!} a_2(x, x) + \ldots + \frac{1}{m!} a_m(x, \ldots, x) \quad (2.7)$$

where $x \in \mathbf{B}$, $y \in \mathbf{B}'$ and $a_r(\xi_1, \ldots, \xi_r)(r = 1, \ldots, m)$ be $\mathbf{B}'$ - valued symmetric multilinear functionals.

The set of functionals $\{a_1(x), a_2(x,x), \ldots, a_m(x, \ldots, x)\}$ can be regarded as the coordinates of X.

The above expression (2.4) will be called the *abstract tensorial representation of* $X \in L^m(\mathbf{B}, \mathbf{B}')$.

In particular, $L^1(\mathbf{B}, \mathbf{B}')$ can be identified with the space of all homogeneous linear mappings of $\mathbf{B}$ into $\mathbf{B}'$. Now, we shall call an element of $J^m(\mathbf{B}, \mathfrak{M})$ of the source $0 \in \mathbf{B}$ and the target $P \in \mathfrak{M}$ a $(m)_{\mathbf{B}}$ - *vitesse of the origin* P in $\mathfrak{M}$. and the totality $J_0^m(\mathbf{B}, \mathfrak{M})$ will be denoted by $\mathfrak{M}^{(m)}\ \mathbf{B}$.

In particular, when $\mathbf{B} = R^p$, it is a generalization of C. Ehresmann's p^m-vitesse for a abstract manifold $\mathfrak{M}$ and we shall call it a $(m)_p$ - *vitesse* of the origin P in $\mathfrak{M}$, of which the totality corresponds to C. Ehresmann's symbol $T_p^m(\mathfrak{M})$.

Dually, we call an elemnt of $J^m(\mathfrak{M}, \mathbf{B})$ of the source P and the target $0\in\mathbf{B}$ $a(m)_{\mathbf{B}}$ - *covitesse* of the origin P of $\mathfrak{M}$ and the totality will be denoted by

$$\mathfrak{M}^{(m)}_{\mathbf{B}}\equiv\{j^m_P f\in J^m(\mathfrak{M},\ \mathbf{B}):f(P)=0\in\mathbf{B}\}.$$

In particular, when $\mathbf{B}=R^p$, it is a generalization of C. Ehresmann's p^m - covitesse for a abstract manifold $\mathfrak{M}$ and we shall call it a $(m)_p$- *covitesse* of the origin P in $\mathfrak{M}$. of which the totality corresponds to C. Ehresmann's symbol $T^{*m}_p(\mathfrak{M})$.

Then, $L^m(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')$ can be regarded as the space of $(m)_{\mathbf{B}}$ - vitesse of the origin $0\in\mathbf{B}'$ in $\mathbf{B}'$ or as the space of $(m)_{\mathbf{B}'}$ - covitesse of the origin $0\in\mathbf{B}$ of $\mathbf{B}$ and we get the relation:

$$L^m(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')=\mathbf{B}'^{(m)_{\mathbf{B}}}\cap\mathbf{B}^{(m)^*_{\mathbf{B}'}}. \tag{2.8}$$

Now, an abstractly generalized infinitesimal jet of order m $j^m_P I_P$ of the identity transformation I_P around $P\in\mathfrak{M}$ is called the *abstractly generalized neutral jet of order m at P*.

An abstractly generalized infinitesimal jet of order m $j^m_{P_0}f\in J^m(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}')$ is called *invertible* if there exists an abstractly generalized infinitesimal jet $j^m_{f(P_0)}\ g\in J^m(\mathfrak{M}',\ \mathfrak{M})$ such that its composition with $j^m_{P_0}f$ become the neutral jets i.e.

$$\left.\begin{aligned} j^m_{P_0}f\circ j^m_{f(P_0)}\ g&=j^m_{f(P_0)}\ I_{f(P_0)}\\ j^m_{f(P_0)}\ g\circ j^m_{P_0}f&=j^m_{P_0}\ I_{P_0}\end{aligned}\right| \tag{2.9}$$

where I_{P_0}, $I_{f(P_0)}$ be the identity mappings of $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{M}'$) into itself defined in a neighborhood of P_0 (resp. $f(P_0)$).

The set $\Pi^m(\mathfrak{M})$ of invertible elements of $J^m(\mathfrak{M},\ \mathfrak{M})$ becomes a groupoid and the mapping μ^l_m defines an representation of $\Pi^m(\mathfrak{M})$ on $\Pi^l(\mathfrak{M})$.

An abstractly generalized infinitesimal jet of order m from $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{M}$ such that both the source and the target coincide with $P\in\mathfrak{M}$ will be said to be *stable at P*.

Now, an abstractly generalized stable m - jet at P_0 in $\mathfrak{M}$ is called an *abstractly generalized m - jet of isotropy at* P_0 if it is invertible, of which the totality becomes a group $L^m_{P_0}(\mathfrak{M})$ called the *group of the generalized infinitesimal isotropy of order m of* $\mathfrak{M}$ *at* P_0. It is isomorphic to the group $L^m_0(\mathbf{B})$ which is the totality of invertible elements of $L^m(\mathbf{B},\ \mathbf{B})$ and we shall denote it as $L^m(\mathbf{B})$.

It follows that the product $L^m(\mathbf{B}')\ XL^m(\mathbf{B})$ is the group of operators $(s',\ s)\ X=s'Xs^{-1}$ operating effectively on $L^m(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')$ where $s'\in L^m(\mathbf{B})$, $s'\in L^m(\mathbf{B}')$. $X\in L^m(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')$.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁR KÖZPONTI

The totality $H^m(\mathfrak{M})$ of all invertible $(m)_{(\mathbf{B})}$ - vitesse of $\mathfrak{M}$ is a generalization of C. Ehresmann's ordinary principal prolongation of order m for $\mathfrak{M}$.

Now, corresponding to the group $GL^m(n, R) \equiv \{(a^i_j, a^i_{j_1, j_2}, \ldots, a^i_{j_1, j_2, \ldots, j_m})$: det. $(a^i_j) \neq 0$, $a^i_{j_1, \ldots, j_r} = a^i_{(j_1, \ldots, j_r)}$, $r=1, \ldots, m\}$, we consider

$$GL^{(m)}(\mathbf{B}) \equiv \{(\underset{(1)}{a}(\xi), \underset{(2)}{a}(\xi, \xi), \ldots, \underset{(m)}{a}(\xi, \ldots, \xi))\}$$

where $\underset{(r)}{a}(\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathbf{B}$ be multilinear and symmetric in $\xi_1 \in \mathbf{B}, \ldots, \xi_r \in \mathbf{B}$ and $\underset{(1)}{a}(\xi)$ be non-singular i.e.

$\exists$ linear functional $\underset{(1)}{a^{-1}}(\xi)$: $\underset{(1)}{a^{-1}}(\underset{(1)}{a}(\xi)) = \underset{(1)}{a}(\underset{(1)}{a^{-1}}(\xi)) = \xi$.

For two elements

$$A = (\underset{(1)}{a}(\xi), \ldots, \underset{(m)}{a}(\xi, \ldots, \xi)) \in GL^{(m)}(\mathbf{B}),$$

$$B = (\underset{(1)}{b}(\xi), \ldots, \underset{(m)}{b}(\xi, \ldots \xi)) \in GL^{(m)}(\mathbf{B}),$$

we shall define the product by

$$A \cdot B = (\underset{(1)\,(1)}{a}(\underset{(1)}{b}(\xi)), \underset{(1)\,(2)}{a}(\underset{(1)}{b}(\xi, \xi)) + \underset{(2)\,(1)}{a}(\underset{(1)}{b}(\xi), \underset{(1)}{b}(\xi)), \ldots$$

$$\ldots, \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqq r_1, \ldots, r_p \leqq m \,:\, r_1 + \ldots + r_p = m} \frac{m!}{r_1! \ldots r_p!} \cdot$$

$$\cdot \underset{(p)\,(r_1)}{a}(\underset{(r_1)}{b}(\xi, \ldots, \xi), \ldots, \underset{(r_p)}{b}(\xi, \ldots, \xi))) \tag{2.10}$$

Then, $GL^{(m)}(\mathbf{B})$ constitutes a group and it can be identified with $L^{(m)}(\mathbf{B})$, as easily seen.

And, it follows that the space $J^m(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ of abstractly generalized infinitesimal jets of order m of $\mathfrak{M}$ into $\mathfrak{M}'$ becomes a fibre bundle with the fibre structure such that the base space is $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}'$ (or $\mathfrak{M}$ or $\mathfrak{M}'$), the projection is $\gamma = (\alpha, \beta)$ (resp. α, resp. β) the fibre space is isomorphic to $L^m(\mathbf{B}, \mathbf{B}')$ (resp. $\mathfrak{M}'^{(m)}\mathbf{B}$, resp. $\mathfrak{M}^{(m)*}_{\mathbf{B}'}$) and the structural group is $L^{(m)}(\mathbf{B}) \times L^{(m)}(\mathbf{B}')$ (resp. $L^{(m)}(\mathbf{B})$, resp. $L^{(m)}(\mathbf{B}')$).

* * *

For References to see the previous paper I of this Bull Tom 19(33), fasc 1/1974

К. АБСТРАКТНОМУ ОБОБЩЕНИЮ ПРОСТРАНСТВ-СТРУЙ НА РАЗНОВИДНОСТЯХ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ЛИНЕЙНЫМИ КООРДИНАТАМИ. II. ИЗМЕНЕНИЯ КООРДИНАТ В АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ-СТРУЯХ СОСТАВЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ АБСТРАКТНЫХ СТРУЙ И ГРУППА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ АБСТРАКТНЫХ ИЗОТРОПИЙ

(РЕЗЮМЕ)

Данная статья является продолжением статьи опубликованной в бюллетене Том 19(33) вып. I, 1974.

В настоящей статье получаются уравнения для изменений координат в фибрированном пространстве $J^m(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ абстрактных бесконечно малых m-струй и приводятся явные формы для местных отображений составления наших абстрактных бесконечно малых струй и для координатных отображений умножения в группе бесконечно малых изотропий обобщениями формул авторов А. Файс, Р. Гоппе и Ваа ди Бруно.

ASUPRA GENERALIZĂRII ABSRACTE A SPAȚIILOR - JET PE VARIETĂȚI CU COORDONATE TOPOLOGICE LINEARE II. TRANSFORMĂRI DE COORDONATE ÎN SPAȚII -JET ABSTRACTE, COMPUNEREA JETURILOR INFINITEZIMALE ABSTRACTE ȘI GRUPUL IZOTROPIILOR INFINITEZIMALE ABSTRACTE

(REZUMAT)

Acest articol este o continuare a articolului publicat în acest buletin Tom. 19(33), fasc, 1, 1974.

În prezentul articol se obțin ecuații pentru transformări de coordonate în spațiul fibrat $J^m(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ al m-jeturilor infinitezimale abstracte și se dau formele explicite pentru reprezentări locale ale compunerii jeturilor noastre infinitezimale abstracte și pentru reprezentările de coordonate ale înmulțirii în grupul izotropiilor infinitezimale prin generalizări ale formulelor autorilor A. Fais, R. Hoppe și Vaá di Bruno.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

EXEMPLES NUMERIQUES DE COUPLAGES D'UN OSCILLATEUR NON LINEAIRE FORCE ET D'UN OSCILLATEUR LINEAIRE LIBRE

PAR

H. BASTIN, M. DELCHAMBRE

Faculté des Sciences Appliquées – Université Libre de Bruxelles – BELGIQUE

EQUATIONS

Considérons le système formé par un oscillateur de Van der Pol-Düffing soumis à de faibles excitations extérieures de fréquence ω_0, couplé avec un oscillateur linéaire libre.

$$\ddot{u}+\omega_1^2 u=\varepsilon(1-u^2)\dot{u}-\varepsilon\lambda u^3+\varepsilon\alpha\dot{v}+\varepsilon\gamma v+\varepsilon\omega_0 f\cos\omega_0 t \tag{1.1}$$

$$\ddot{v}+\omega_2^2 v=\varepsilon\beta\dot{u}+\varepsilon\delta u \tag{1.2}$$

ω_1, ω_2 sont les fréquences fondamentales libres du système linéarisé et découplé ;

α, β sont les coefficients du couplage gyroscopique ;

γ, δ sont les coefficients du couplage linéaire ;

ε est un petit paramètre, donc, le couplage, le terme forcé et la non linéarité sont faibles.

Supposons des solutions de la forme

$$u=A_1(t)\cos\omega_0 t+B_1(t)\sin\omega_0 t \tag{2.1}$$

$$v=A_2(t)\cos\omega_0 t+B_2(t)\sin\omega_0 t \tag{2.2}$$

en faisant les approximations classiques de la méthode du premier harmonique, nous pouvons écrire le système dynamique suivant :

$$\frac{dA_1}{dT}=A_1+x_1B_1-(A_1-aB_1)\rho+\alpha A_2-\gamma B_2 \tag{3.1}$$

$$\frac{dB_1}{dT}=-x_1A_1+B_1-(aA_1+B_1)\rho+\alpha B_2+\gamma A_2+f \tag{3.2}$$

$$\frac{dA_2}{dT} = x_2B_2+\beta A_1-\delta B_1 \tag{3.3}$$

$$\frac{dB_2}{dT} = -x_2A_2+\beta B_1+\delta A_1 \tag{3.4}$$

où $\rho=\frac{1}{4}(A_1^2+B_1^2)$; $a=\frac{3\lambda}{\omega_0}$; $T=\frac{\varepsilon t}{2}$; $x_i=\frac{\Delta_i}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\omega_i^2-\omega_0^2}{\omega_0}$ $(i=1, 2)$.

Les états d'équilibre du système (3) sont solutions de

$$A_1+x_1B_1-(A_1-aB_1)\rho+\alpha A_2-\gamma B_2=0 \tag{4.1}$$

$$x_1A_1-B_1+(aA_1+B_1)\rho-\alpha B_2-\gamma A_1=f \tag{4.2}$$

$$x_2B_2+\beta A_1-\delta B_1=0 \tag{4.3}$$

$$x_2A_2-\beta B_1-\delta A_1=0 \tag{4.4}$$

STABILITÉ

Soit $\overline{A_i}$, $\overline{B_i}$ $(i=1, 2)$ un point singulier du système (3), toute perturbation

$$A_i=\overline{A}_i+\zeta_i, \qquad B_i=\overline{B}_i+\eta_i$$

ζ définit autour du point singulier, un nouveau système linéaire

$$\frac{d\zeta_1}{dT}=\zeta_1+x_1\eta_1-(\zeta_1-a\eta_1)\overline{\rho}-\frac{1}{2}(\overline{A}_1\zeta_1+\overline{B}_1\eta_1)(\overline{A_1}-a\overline{B_1})+\alpha\zeta_2-\gamma\eta_2 \tag{5.1}$$

$$\frac{d\eta_1}{dT}=-x_1\zeta_1+\eta_1-(a\zeta_1+\eta_1)\overline{\rho}-\frac{1}{2}(\overline{A}_1\zeta_1+\overline{B}_1\eta_1)(a\overline{A}_1+\overline{B}_1)+\gamma\zeta_2+\alpha\eta_2+f \tag{5.2}$$

$$\frac{d\zeta_2}{dT} = x_2\eta_2+\beta_2\zeta_1-\delta\eta_1 \tag{5.3}$$

$$\frac{d\eta_2}{dT}=-x_2\zeta_2+\beta\eta_1+\delta\zeta_1 \tag{5.4}$$

Ce système étant linéaire, ses solutions sont de la forme $e^{\mu_i T}$, μ_i étant es valeurs propres de la matrice (6.1)

$$\begin{pmatrix} A-\mu & B & \alpha & -\gamma \\ C & D-\mu & \gamma & \alpha \\ \beta & -\delta & -\mu & x_2 \\ \delta & \beta & -x_2 & -\mu \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

où

$$A=(1-\bar{\rho})-\frac{1}{2}\bar{A}_1(\bar{A}_1-a\bar{B}_1) \tag{6.2}$$

$$B=x_1+a\bar{\rho}-\frac{1}{2}\bar{B}_1(\bar{A}_1-a\bar{B}_1) \tag{6.3}$$

$$C=-x_1-a\bar{\rho}-\frac{1}{2}\bar{A}_1(a\bar{A}_1+\bar{B}_1) \tag{6.4}$$

$$D=(1-\bar{\rho})-\frac{1}{2}\bar{B}_1(a\bar{A}_1+\bar{B}_1) \tag{6.5}$$

Les solutions seront stables si toutes les valeurs propres de la matrice (6.1) ont une partie réelle négative.

COUPLAGE GYROSCOPIQUE $\gamma=\delta=0$

A. $\lambda=0$

Le couplage gyroscopique ainsi obtenu est celui d'un oscillateur de Van der Pol forcé et d'un oscillateur linéaire libre.

Nous allons différencier les cas où les fréquences propres sont égales et où elles sont différentes.

1° $\omega_1=\omega_2$

L'étude des courbes de résonance dans le plan x, ρ se ramène à l'étude de l'équation

$$[(x^2+\alpha\beta)^2+(1-\rho)^2x^2]\,\rho=x^2K^2 \quad \text{où} \quad K=\frac{f}{2}\cdot \tag{7}$$

En résolvant cette équation par rapport à x^2, on montre que les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\alpha\beta>0 \text{ et } K^2-4\alpha\beta\rho-\rho(1-\rho)^2>0 \tag{8.1}$$

où

$$\alpha\beta<0 \text{ et } K^2-\rho(1-\rho)^2>0 \tag{8.2}$$

Les zones hachurées de la figure 1 satisfont à ces conditions pour différentes valeurs du couplage $\alpha\beta$.

On en tire les conclusions suivantes :

$\alpha\beta=\frac{1}{12}$: La courbe de résonance $K^2=\frac{8}{27}$ présente un point de rebroussement (fig. 2) ;

$\alpha\beta<\frac{1}{12}$: $K_1<K$ la courbe de résonance est du type ordinaire,

$K=K_1$ la courbe de résonance possède un point double,

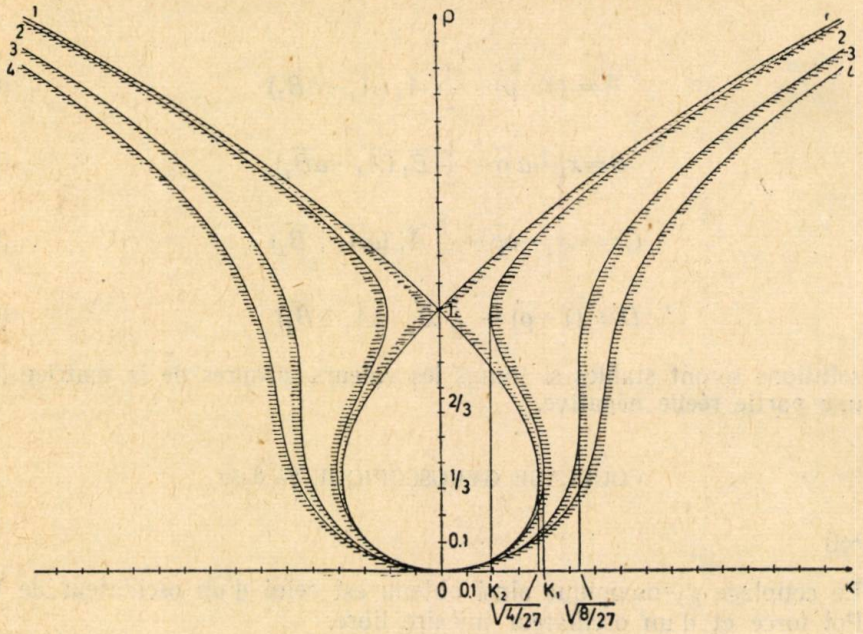


Fig. 1. Cubiques d'équation $K^2 - [4\alpha\beta + (1-\rho)^2]\,\rho = 0$:
1 — $\alpha\beta = 0$; *2* — $\alpha\beta = 0{,}01$; *3* — $\alpha\beta = 1/12$; *4* — $\alpha\beta = 1/8$

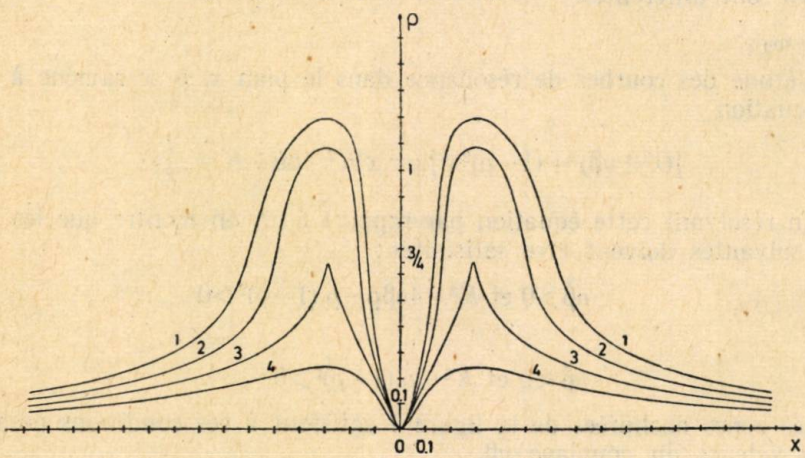


Fig. 2. Courbes de résonance $\alpha\beta = 1/12$:
1 — $K^2 = 12/27$; *2* — $K^2 = 10/27$; *3* — $K^2 = 8/27$; *4* — $K^2 = 6/27$.

$K_2 \leqslant K < K_1$ la courbe de résonance se scinde en deux courbes distinctes,

$K < K_2$ la courbe de résonance est du type ordinaire fort aplatie (fig. 3) ;

$\alpha\beta = 0$: Les courbes de résonance sont celles de l'oscillateur de Van der Pol non couplé ;

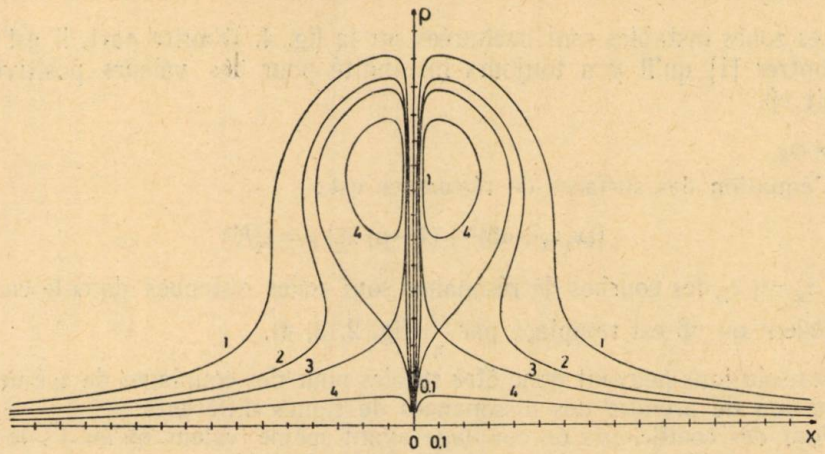


Fig. 3. Courbes de résonance $\alpha\beta=0.01$:
1 — $K^2=8/27$; *2* — $K>K_1$; *3* — $K=K_1$; *4* — $K_1>K>K_2$

$\alpha\beta < 0$: Les courbes de résonance sont soit du type ordinaire, soit des courbes qui se scindent en deux courbes distinctes suivant que K^2 est supérieur ou inférieur à $\frac{4}{27}$ (fig. 4).

L'application du critère d'Hurwitz donne les conditions de stabilité suivantes :

$$2\rho-1>0 \tag{9.1}$$

$$(1-\rho)(1-3\rho)+x^2-\alpha\beta>0 \tag{9.2}$$

$$-\alpha\beta\,(2\rho-1)^2\,[(1-\rho)(1-3\rho)+4x^2]>0 \tag{9.3}$$

$$x^2(1-\rho)(1-3\rho)+(x^2+a)^2>0 \tag{9.4}$$

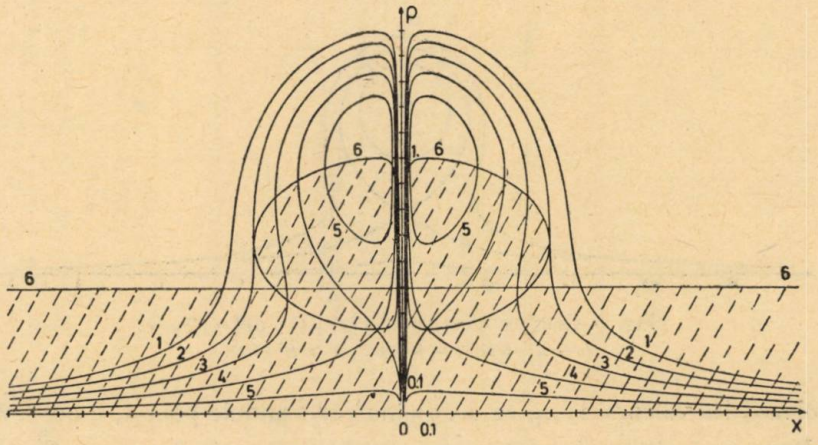


Fig. 4. Courbes de résonance $\alpha\beta=-0.01$:
1 — $K^2=10/27$; *2* — $K^2=8/27$; *3* — $K^2=6/27$; *4* — $K^2=4/27$; *5* — $K^2=2/27$; *6* — Courbes de stabilité, les zones hachurées sont instables.

Les zones instables sont hachurées sur la fig. 4. D'autre part, il est facile de montrer [1] qu'il y a toujours instabilité pour des valeurs positives du produit $\alpha\beta$.

2° $\omega_1 \neq \omega_2$

L'équation des surfaces de résonance est :

$$[(x_1 x_2+\alpha\beta)^2+(1-\rho)\, x_2^2]\, \rho=x_2^2 K^2 \qquad (10)$$

— Si $x_2=\eta\, x_1$, les courbes de résonance sont celles obtenues dans le cas précédent où $\alpha\beta$ est remplacé par $\frac{\alpha\beta}{\eta}$ (fig. 2, 3, 4).

Les solutions peuvent donc être stables pour des couplages de même signe à condition de prendre des dissonances de signes différents.

Pour des coefficients de couplage ayant même valeur qu'au 1°, le choix de η peut stabiliser la solution ou la rendre instable.

— Si x_2=constante, nous retrouvons les courbes solutions de l'équation de Van der Pol non couplée mais symétriques par rapport à l'axe $x_1=-\frac{\alpha\beta}{x_2}$ et non plus par rapport à l'axe $x_1=0$.

— Si x_1=constante, l'équation (10) est du second degré par rapport à x_2 en la résolvant on trouve :

$$x_2=\frac{-\alpha\beta x_1 \pm \alpha\beta \sqrt{\rho\,[K^2-\rho\,(1-\rho)^2]}}{\rho\,[x_1^2+(1-\rho)^2]-K^2}.$$

Le dénominateur égalé à zéro est l'équation des courbes de Van der Pol découplée (fig. 5).

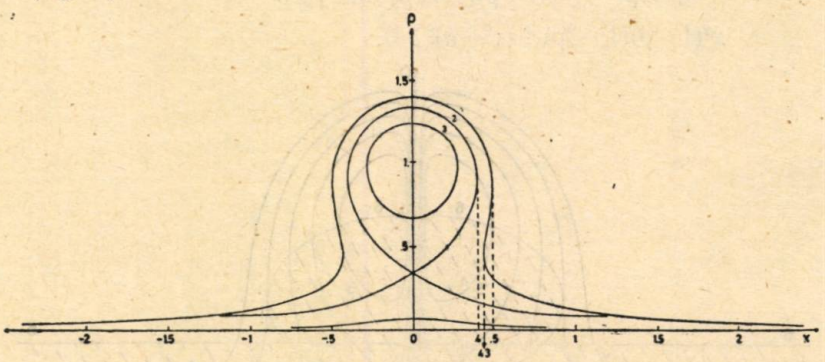


Fig. 5. Courbes d'équation $\rho\,[x^2+(1-\rho)^2]-K^2=0$:
1 — $K^2=6/27$; *2* — $K^2=4/27$; *3* — $K^2=2/27$.

Suivant les valeurs de x_1, ce dénominateur s'annule pour 1, 2 ou 3 valeurs de ρ. Pour ces valeurs de ρ, le numérateur vaut soit $0 \Rightarrow x_2=-\frac{\alpha\beta}{2x_1}$, soit $-2\alpha\beta\,\rho\,x_1 \Rightarrow x_2=\pm\infty$.

Les courbes de résonance présentent un extremum ou un point double pour ρ solution de $K^2-\rho\,(1-\rho)^2=0$ et $x_2=\frac{-\alpha\beta}{x_1}$ (fig. 6).

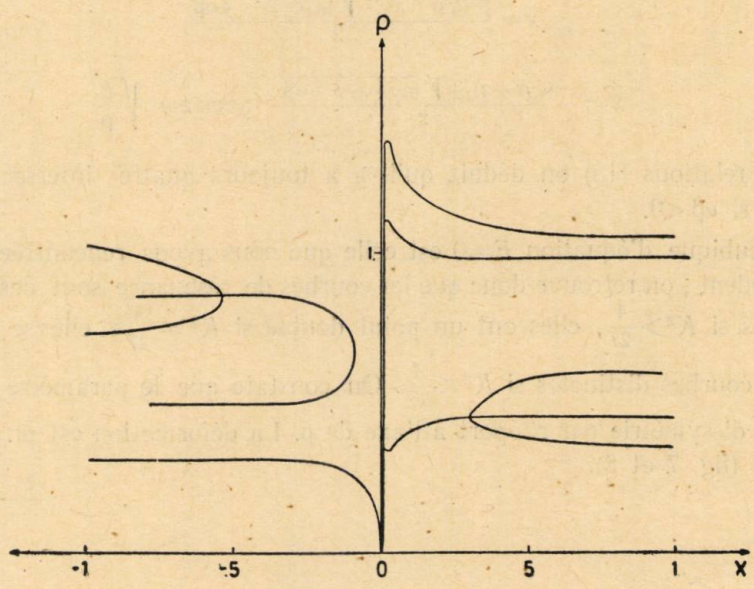


Fig. 6. Courbes d'équation (10) pour $K^2=6/27$ et $x_1=0.47$.

Elles passent toutes par l'origine et présentent un minimum en ce point. Alors qu'au 1°, pour de grandes valeurs de la dissonance les solutions étaient instables, dans ce cas il y a toujours une solution stable.

B. $\lambda\neq 0$ $\omega_1=\omega_2$

Le couplage est celui d'un oscillateur de Van der Pol-Düffing forcé et d'un oscillateur linéaire libre.

Le faisceau des courbes de résonance a pour équation

$$\rho\,[(x^2+a\,\rho\,x+\alpha\beta)^2+x^2(1-\rho)^2]=x^2K^2 \tag{11}$$

Nous réécrirons cette équation sous la forme

$$\rho\,y^2-Ex^2=0 \tag{12.1}$$

où

$$y=x^2+a\,\rho\,x+\alpha\beta \tag{12.2}$$

$$E=K^2-\rho\,(1-\rho)^2 \tag{12.3}$$

Les droites du plan x, y d'équation (12.1) sont réelles si $E>0$ et coupent la parabole d'équation (12.2) en 2 ou 4 points ayant pour abscisses

$$x=\frac{-(a\rho-z)\pm\sqrt{(a\rho-z)^2-4\alpha\beta}}{2} \tag{13.1}$$

$$x=\frac{-(a\rho+z)\pm\sqrt{(a\rho+z)^2-4\alpha\beta}}{2} \quad \text{avec } z=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{13.2}$$

Des relations (13) on déduit qu'il y a toujours quatre intersections si $E>0$ et si $\alpha\beta<0$.

La cubique d'équation $E=0$ est celle que nous avons rencontrée dans le cas précédent, on retrouve donc que les courbes de résonance sont des courbes ordinaires si $K^2>\frac{4}{27}$, elles ont un point double si $K^2=\frac{4}{27}$ et elles se scindent en deux courbes distinctes si $K^2<\frac{4}{27}$. On constate que le paramètre a introduit une dissymétrie par rapport à l'axe de ρ. La déformation est proportionnelle à a (fig. 7 et 8).

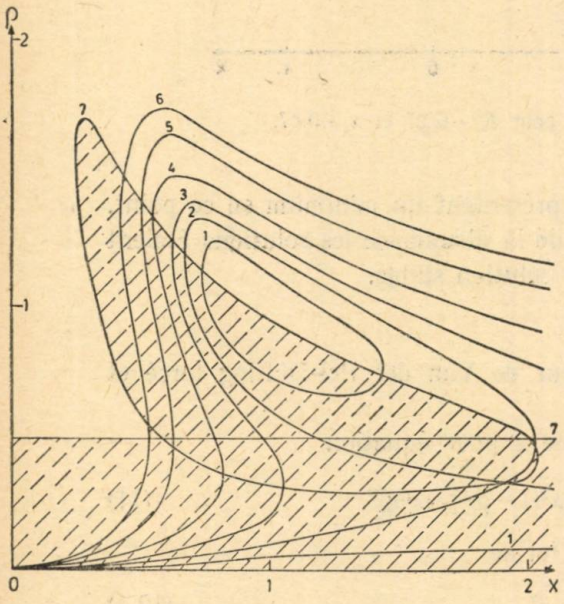


Fig. 7. Courbes de résonance $a=1$; $\alpha\beta=-0.1$ — Premier quadrant :
1 — $K^2=2/27$; *2* — $K^2=4/27$; *3* — $K^2=6/27$; *4* — $K^2=18/27$; *5* — $K^2=18/27$; *6* — $K^2=26/27$; *7* — Courbes de stabilité, les zones hachurées sont instables.

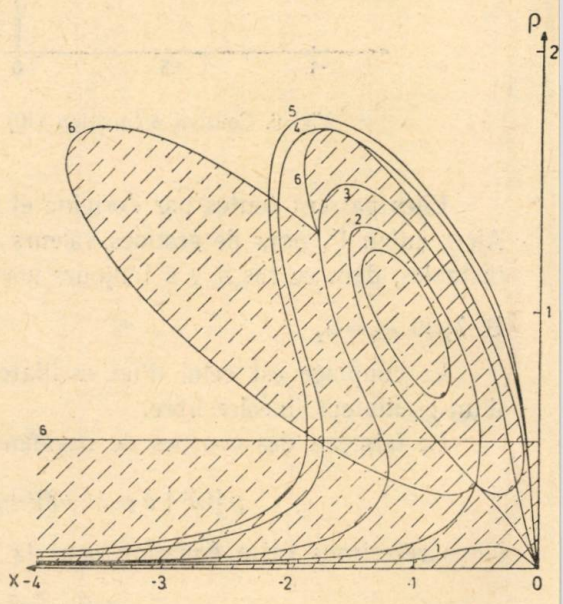


Fig. 8. Courbes de résonance $a=1$; $\alpha\beta=-0.1$ — Deuxième quadrant :
1 — $K^2=2/27$; *2* — $K^2=4/27$; *3* — $K^2=10/27$; *4* — $K^2=26/27$; *5* — $K^2=26/27$; *6* — Courbes de stabilité, les zones hachurées sont instables.

Si $\alpha\beta>0$, les droites d'équation (12.1) coupent la parabole (12.2)

– en 0 points si $$\rho^3-2\rho+\rho-K^2<0 \tag{14.1}$$

– en 2 points si

$$\begin{cases} (a^2+1)\,\rho^3-2(1+2a\sqrt{\alpha\beta})\,\rho^2+(1+4\alpha\beta)\,\rho-K^2>0 & (14.2)\\ (a^2+1)\,\rho^3-2(1-2a\sqrt{\alpha\beta})\,\rho^2+(1+4\alpha\beta)\,\rho-K^2<0 & (14.3)\end{cases}$$

– en 4 points si

$$\begin{cases} \rho^3-2\rho+\rho-K^2>0 & (14.4)\\ (a^2+1)\,\rho^3-2\,(1+2a\sqrt{\alpha\beta})\,\rho^2+(1+4\alpha\beta)\,\rho-K^2<0 & (14.5)\end{cases}$$

où

$$(a^2+1)\,\rho^3-2(1-2a\sqrt{\alpha\beta})\,\rho^2+(1+4\alpha\beta)\,\rho-K^2>0 \tag{14.6}$$

La discussion qui précède montre qu'il y a 0,2 ou 4 points d'intersections suivant qu'on se trouve dans les régions I, II ou III de la figure 9.

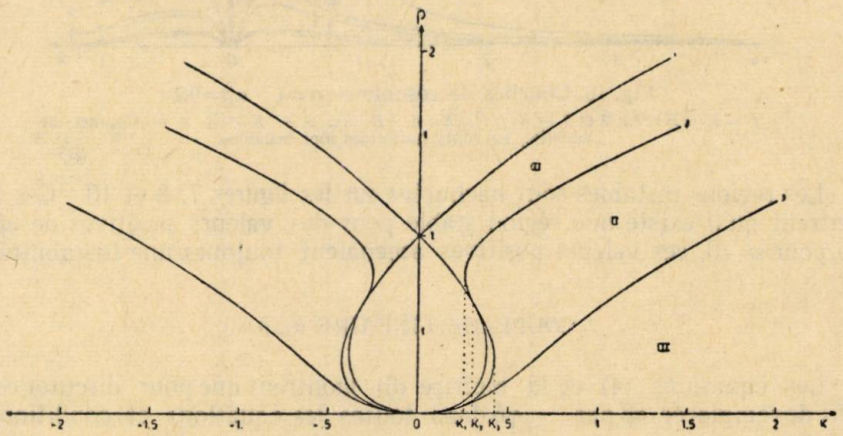


Fig. 9. :

1 — Cubique d'équation $\rho^3-2\rho+\rho-K^2=0$; 2 — Cubique d'équation $(a^2+1)\rho^3-2(1+2a\sqrt{\alpha\beta})\,\rho^2+$ $+(1+4\alpha\beta)\,\rho-K^2=0$; 3 — Cubique d'équation $(a^2+1)\rho^3-2(1-2a\sqrt{\alpha\beta})\,\rho^2+(1+4\alpha\beta)\,\rho-K^2=0 (a=1;\ \alpha\beta=0.1)$.

Les courbes de résonance seront donc à nouveau du type ordinaire si $K>K_2$, à point double si $K=K_2$ et se scindant en deux courbes distinctes si $K<K_2$ (fig. 10).

L'application du critère d'Hurwirtz conduit dans ce cas aux conditions de stabilité suivantes :

$$2\rho-1>0 \tag{15.1}$$
$$(1-\rho)(1-3\rho)+(2a\,\rho+x)^2-\alpha\beta-a^2\,\rho^2>0 \tag{15.2}$$
$$-\alpha\beta\,[(1-\rho)(1-3\rho)+4\,(x+a\,\rho)^2-a^2\,\rho^2]>0 \tag{15.3}$$
$$x^2(1-\rho)(1-3\rho)+[(2a\,\rho+x)\,x+\alpha\beta]^2-a^2\,\rho^2\,x^2>0 \tag{15.4}$$

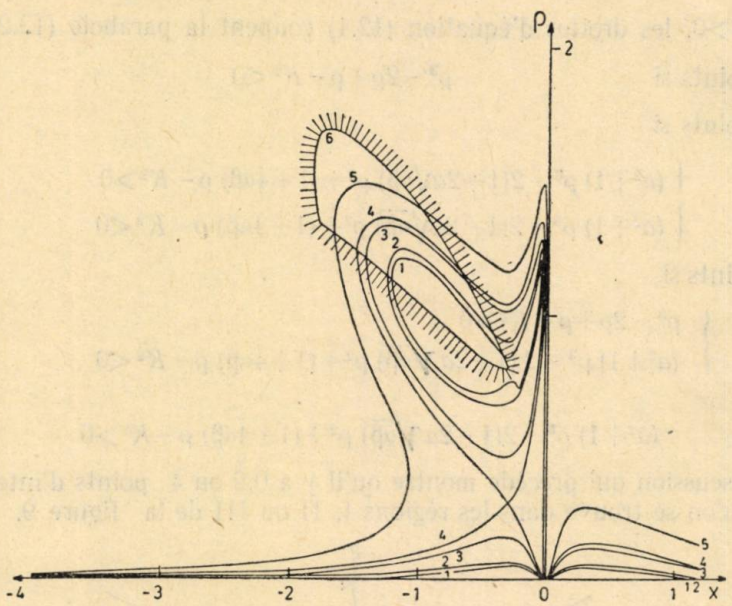


Fig. 10. Courbes de résonance $a=1$; $\alpha\beta=0.1$:
1 — $K_1 < K < K_2$; *2* et *3* — $K_2 < K < K_3$; *4* — $K = K_3$; *5* — $K > K_3$ *6* — Courbes de stabilité, les zones hachurées sont instables.

Les régions instables sont hachurées sur les figures 7, 8 et 10. Ces figures montrent qu'il existe une région stable pour des valeurs positives de $\alpha\beta$ alors que pour $a=0$, ces valeurs positives amenaient toujours une instabilité.

COUPLAGE LINÉAIRE $\alpha=\beta=0$

Les équations (4) et la matrice (6) montrent que pour discuter ce cas, i suffit de remplacer $\alpha\beta$ par $-\gamma\delta$ dans toutes les équations et conditions pré cédentes.

Les résultats relatifs au couplage linéaire se déduisent donc facilement de ceux relatifs au couplage gyroscopique.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Bastin, M. Delchambre, *Sur le couplage gyroscopique d'un oscillateur de Van der Pol en régime forcé et d'un oscillateur linéaire libre. Bulletin de la Classe des Sciences — Académie Royale de Belgique.* 5ème série, Tome LIX 1973—3.
2. H. Bastin, M. Delchambre, *Sur le couplage d'un oscillateur de Van der Pol forcé et d'un oscillateur linéaire libre dont les fréquences propres diffèrent.*
3. H. Bastin, M. Delchambre, *Sur un exemple de couplage d'un oscillateur de Van der Pol-Düffing forcé et d'un oscillateur linéaire libre.*
4. G. Chappaz, *Aspects Analytiques et Analogiques des solutions de l'Equation de Van der Pol en Régime Forcé Sinusoïdal.* Int. J. Non Linear Mechanics, vol 3 (1968).

5. T. V. Davies and E. M. James, *Nonlinear Differential Equations*, Addison-Wesley Publishing Company (1966).
6. A. Le Pourhiet, J. G. Paquet, *Phénomène de saut dans un oscillateur de Van der Pol.* Equa-Diff 70, Centre de Recherches Physiques, Marseille (1970).
7. F. Martinet L. Sideriades, *Sur les solutions forcées de l'équation de Van der Pol-Düffing dans l'approximation du premier harmonique.* C. R. Acad. Sc. Paris T262 Série A – 635 mars 1966.
8. F. Martin, *Sur quelques résultats concernant le régime forcé des diodes à effet tunnel. L'onde Electrique*, t XLVIII n° 490 janvier 1968.
9. N. Minorsky, *Introduction to Nonlinear Mechanics. Edwards Brothers* (1947).
10. L. Sideriades, *Les solutions forcées de l'équation de Van der Pol. L'Onde Electrique*, 463, t. XLV (1965).
11. J. Stoker, *Nonlinear Vibrations. Interscience Publishers*, New York (1950).

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ СЦЕПЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВЫНУЖДЕННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ЛИНЕЙНЫМ СВОБОДНЫМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ

(РЕЗЮМЕ)

Данная статья является синтезисом трёх опубликованных ранее статей исследующих вопрос гироскопического сцепления вынужденного осциллятора Ван дер Поля и линейного свободного осциллятора с одинаковыми собственными частотами [1], с одинаковым сцеплением но оба осциллятора имеют разные собственные частоты [2] и сцепление вынужденного осциллятора Ван дер Поля с линейным свободным осциллятором [3].

Даны также относительные выводы в связи с линейным негироскопическим сцеплением.

Кривые резонанса расчитаны в плоскости Андронова при помощи метода первой гармоники.

Методом возмущений возможно установление зон устойчивости.

EXEMPLE NUMERICE DE CUPLARE A UNUI OSCILATOR NELINIAR FORȚAT ȘI A UNUI OSCILATOR LINIAR LIBER

(REZUMAT)

Acest articol este sinteza a trei articole precedente tratînd cuplajul giroscopic al unui oscilator Van der Pol forțat și a unui oscilator liniar liber avînd ambele aceleași frecvențe proprii [1], același cuplaj, însă cele două oscilatoare avînd frecvențe proprii diferite [2] și în fine cuplajul unui oscilator Van der Pol-Düffing forțat și a unui oscilator linear liber [3].

S-au adăugat concluzii relative la un cuplaj linear negiroscopic.

Curbele de rezonanță sînt calculate în planul lui Andronov cu ajutorul metodei primei armonici.

Metoda perturbațiilor permite stabilirea zonelor de stabilitate.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

SUR UNE EQUATION NON LINEAIRE DE MATHIEU

PAR

M.E.L. VANDEWIELE
U.L.B.

1. INTRODUCTION

Nous considérons l'équation :

$$\ddot{x}+x=\varepsilon\, bx\cos\alpha t+\varepsilon\, c_1x^3+\varepsilon\, c_2x^5+\varepsilon\, d_1\dot{x}^2+\varepsilon\, d_2\dot{x}^4 \tag{1}$$

$$\varepsilon\ll 1,\quad b>0,\quad \varepsilon>0,\quad \alpha\sim 2$$

Pour certaines valeurs des paramètres, l'équation (1) se réduit à celle du mouvement d'un pendule excité par des oscillations de son point de suspension Ce dernier problème a été étudié à plusieurs reprises avec des hypothèses linéaires [1], ..., [6], et non linéaires [7], ..., [14].

Dans ce qui suit, nous appliquons la méthode de Struble [15].

2. EQUATIONS DU PREMIER ORDRE DE (1)

Cherchons une solution de (1) de la forme :

$$x=a\cos(t-\Phi)+\varepsilon x_1 \tag{2}$$

L'équation (1) possède pour $\varepsilon=0$ la solution générale $x=a\cos(t-\Phi)$ où l'amplitude a et la phase Φ sont des constantes quelconques. Nous supposons que, pour $\varepsilon\neq 0$, a et Φ sont des fonctions lentement variables de t.

Déterminons les variations de a et de Φ, ainsi que de x_1. En substituant (2) dans (1), nous obtenons en négligeant les termes en ε^2 :

$$2a\dot{\Phi}\cos(t-\Phi)-2\dot{a}\sin(t-\Phi)+\varepsilon(\ddot{x}_1+x_1)=\varepsilon\, ab\cos(t-\Phi)\cos\alpha t+$$

$$+\frac{\varepsilon a^3 c_1}{4}[3\cos(t-\Phi)+\cos 3(t-\Phi)]+\frac{\varepsilon a^5 c_2}{16}[\cos 5(t-\Phi)+5\cos 3(t-\Phi)+$$

$$+10\cos(t-\Phi)]+\frac{\varepsilon a^2 d_1}{2}[1-\cos 2(t-\Phi)]+$$

$$+\frac{\varepsilon a^4 d_2}{8}[3-4\cos 2(t-\Phi)+\cos 4(t-\Phi)]. \tag{3}$$

où nous avons supposé que les termes en $\ddot{a}$, $\ddot{\Phi}$ sont de l'ordre de grandeur de ε^2 et ceux en $\dot{a}$, $\dot{\Phi}$ de l'ordre de grandeur de ε.

Puisque nous nous intéressons qu'aux oscillations subharmoniques ($\alpha \sim 2$), le premier terme du second membre de (3) s'écrit :

$$\varepsilon ab \cos(t-\Phi)\cos \alpha t = \frac{\varepsilon ab}{2}\cos(t-\Phi+\alpha t) + \frac{\varepsilon ab}{2}\cos(t-\Phi-\alpha t) =$$

$$= \frac{\varepsilon ab}{2}\cos[(1+\alpha)t-\Phi] + \frac{\varepsilon ab}{2}\cos[(\alpha-2)t+2\Phi]\cos(t-\Phi) -$$

$$- \frac{\varepsilon ab}{2}\sin[(\alpha-2)t+2\Phi]\sin(t-\Phi). \tag{4}$$

En identifiant les termes en $\cos(t-\Phi)$, en $\sin(t-\Phi)$ et les termes restants de l'équation (3) et en tenant compte de (4), nous obtenons successivement :

$$2\dot{\Phi} = \frac{\varepsilon b}{2}\cos[(\alpha-2)t+2\Phi] + \frac{3\varepsilon a^2 c_1}{4} + \frac{10\varepsilon a^4 c_2}{16}, \tag{5}$$

$$-2\dot{a} = -\frac{\varepsilon ab}{2}\sin[(\alpha-2)t+2\Phi], \tag{6}$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{ab}{2}\cos[(1+\alpha)t-\Phi] + \frac{a^3 c_1}{4}\cos 3(t-\Phi) +$$

$$+ \frac{a^5 c_2}{16}\cos 5(t-\Phi) + \frac{5a^5 c_2}{16} + \cos 3(t-\Phi) +$$

$$+ \frac{a^2 d_1}{2} - \frac{a^2 d_1}{2}\cos 2(t-\Phi) + \frac{3a^4 d_2}{8} + \frac{a^4 d_2}{8}\cos 4(t-\Phi) - \frac{a^4 d_2}{2}\cos 2(t-\Phi). \tag{7}$$

En posant

$$\gamma = (\alpha-2)t+2\Phi \tag{8}$$

les équations (5) et (6) deviennent :

$$\frac{\dot{\gamma}}{\varepsilon} = \frac{b}{2}\cos\gamma + \frac{3a^2 c_1}{4} + \frac{5a^4 c_2}{8} + \frac{\alpha-2}{\varepsilon} \tag{9}$$

$$\frac{\dot{a}}{\varepsilon} = \frac{ab}{4}\sin\gamma. \tag{10}$$

3. SOLUTIONS DE PREMIER ORDRE DE L'EQUATION (1)

3.1. Solutions stationnaires

Les solutions stationnaires correspondent aux points singuliers du système (9), (10) et sont solutions du système :

$$\begin{aligned} &\frac{b}{2}\cos\gamma + \frac{3a^2 c_1}{4} + \frac{5a^4 c_2}{8} + \frac{\alpha-2}{\varepsilon} = 0 \\ &\frac{ab}{4}\sin\gamma = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Après élimination de γ, entre les deux équations de (11), nous obtenons l'équation de bifurcation du système (1) :

$$\pm\frac{b}{2}+\frac{3a^2c_1}{4}+\frac{5a^4c_2}{8}+\frac{\alpha-2}{\varepsilon}=0. \tag{12}$$

A chaque racine réelle positive a de l'équation (12), nous associons une solution périodique d'amplitude a de l'équation (1).

En posant

$$\Delta_1=9c_1^2-40\,c_2\left(\frac{\alpha-2}{\varepsilon}+\frac{b}{2}\right), \tag{13}$$

$$\Delta_2=9c_1^2-40\,c_2\left(\frac{\alpha-2}{\varepsilon}-\frac{b}{2}\right), \tag{14}$$

$$\delta=\frac{9\,\varepsilon\,c_1^2}{40\,c_2}, \tag{15}$$

les quatre racines a de l'équation de bifurcation (12) peuvent donc s'écrire :

$$a_1=\sqrt{\frac{-3c_1+\sqrt{\Delta_1}}{5c_2}} \quad \text{(avec } \gamma=0\text{)}, \tag{16}$$

$$a_2=\sqrt{\frac{-3c_1+\sqrt{\Delta_2}}{5\,c_2}} \quad \text{(avec } \gamma=\pi\text{)}, \tag{17}$$

$$a_3=\sqrt{\frac{-3c_1-\sqrt{\Delta_1}}{5c_2}} \quad \text{(avec } \gamma=0\text{)}, \tag{18}$$

$$a_4=\sqrt{\frac{-3c_1-\sqrt{\Delta_2}}{5c_2}} \quad \text{(avec } \gamma=\pi\text{)}. \tag{19}$$

Suivant le signe de c_1, c_2 et $|\delta|-b\varepsilon$, il existe des intervalles de α pour lesquelles il y a 0, 1, 2, 3, 4 solutions stationnaires. Tous les cas possibles ont été résumés dans le tableau 1.

La fréquence de la solution $a\cos(t-\Phi)$ est

$$1-\frac{d\Phi}{dt}=1-\frac{2-\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2},$$

parce que $\gamma=(\alpha-2)\,t+2\Phi$ est une constante.

Donc la fréquence de cette solution est un sousharmonique d'ordre 1/2 de la fréquence d'excitation.

Tableau 1

c_1	c_2	$\lvert\delta\rvert - b\varepsilon$	Intervalle	Sol. Stat.	c_1	c_2	$\lvert\delta\rvert - b\varepsilon$	Intervalle	Sol. Stat.
+	−	−	$\alpha<2-\frac{b\varepsilon}{2}+\delta$	−	−	+	−	$2+\frac{b\varepsilon}{2}<\alpha<2+\frac{b\varepsilon}{2}+\delta$	$a_2,\ a_4$
+	−	−	$2-\frac{b\varepsilon}{2}+\delta<\alpha<2-\frac{b\varepsilon}{2}$	$a_1,\ a_3$	−	+	−	$2+\frac{b\varepsilon}{2}+\delta<\alpha$	−
+	−	−	$2-\frac{b\varepsilon}{2}<\alpha<2+\frac{b\varepsilon}{2}+\delta$	a_3	−	+	+	$\alpha<2-\frac{b\varepsilon}{2}$	$a_1,\ a_2$
+	−	−	$2+\frac{b\varepsilon}{2}+\delta<\alpha<2+\frac{b\varepsilon}{2}$	$a_2,\ a_3,\ a_4$	−	+	+	$2-\frac{b\varepsilon}{2}<\alpha<2+\frac{b\varepsilon}{2}$	$a_1,\ a_2,\ a_3,$
+	−	−	$2+\frac{b\varepsilon}{2}<\alpha$	$a_3,\ a_4$	−	+	+	$2+\frac{b\varepsilon}{2}<\alpha<2-\frac{b\varepsilon}{2}+\delta$	a_1,a_2,a_3,a_4
+	−	+	$\alpha<2-\frac{b\varepsilon}{2}+\delta$	−	−	+	+	$2-\frac{b\varepsilon}{2}+\delta<\alpha<2+\frac{b\varepsilon}{2}+\delta$	$a_2,\ a_4$
+	−	+	$2-\frac{b\varepsilon}{2}+\delta<\alpha<2+\frac{b\varepsilon}{2}+\delta$	$a_1,\ a_3$	−	+	+	$2+\frac{b\varepsilon}{2}+\delta<\alpha$	−
+	−	+	$2+\frac{b\varepsilon}{2}+\delta<\alpha<2-\frac{b\varepsilon}{2}$	a_1,a_2,a_3,a_4	+	+		$\alpha>2+\frac{\varepsilon b}{2}$	−
+	−	+	$2-\frac{b\varepsilon}{2}<\alpha<2+\frac{b\varepsilon}{2}$	$a_2,\ a_3,\ a_4$	+	+		$2+\frac{b\varepsilon}{2}>\alpha>2-\frac{\varepsilon b}{2}$	a_2
+	−	+	$2+\frac{b\varepsilon}{2}<\alpha$	$a_3,\ a_4$	+	+		$2-\frac{\varepsilon b}{2}>\alpha$	$a_1,\ a_2$
−	+	−	$\alpha<2-\frac{b\varepsilon}{2}$	$a_1,\ a_2,$	−	−		$\alpha>2+\frac{\varepsilon b}{2}$	$a_3,\ a_4$
−	+	−	$2-\frac{b\varepsilon}{2}<\alpha<2-\frac{b\varepsilon}{2}+\delta$	$a_1,\ a_2\ a_3$	−	−		$2+\frac{\varepsilon b}{2}>\alpha>2-\frac{\varepsilon b}{2}$	a_3
−	+	−	$2-\frac{b\varepsilon}{2}+\delta<\alpha<2+\frac{b\varepsilon}{2}$	a_2	−	−		$2-\frac{\varepsilon b}{2}>\alpha$	−

3.2. **Solutions non stationnaires.**

Eliminons t entre les équations (9) et (10)

$$-\frac{ba^2}{4}\sin\gamma\,d\gamma+\left[\frac{ab}{2}\cos\gamma+\frac{3c_1a^3}{4}+\frac{5c_2a^5}{8}+\frac{\alpha-2}{\varepsilon}a\right]da=0.$$

De cette équation différentielle, il est possible d'obtenir immédiatement une première intégrale :

$$\frac{ba^2}{4}\cos\gamma+\frac{3c_1a^4}{16}+\frac{5c_2a^6}{48}+\frac{\alpha-2}{2\varepsilon}a^2=c, \tag{20}$$

où c est une constante d'intégration.

Les courbes de phase sont définies par l'équation (20).

Pour une constante d'intégration c très grande, les courbes de phase se réduisent à des cercles.

Une cas typique est représenté sur la figure I.

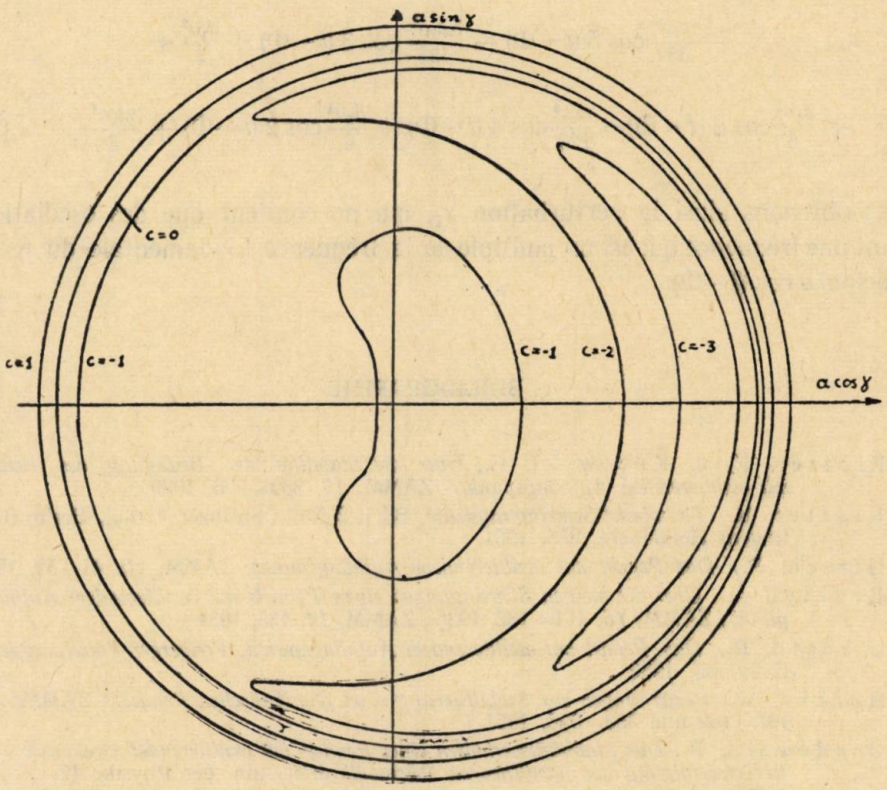


Fig. 1. Les courbes de phase des solutions non stationnaires de l'équation (1) pour les valeurs suivantes des paramètres : $c_1=1$; $c_2=-0{,}15$; $\tilde{c}=-0{,}015$; $\alpha=1{,}993$; $\varepsilon=0{,}01$; $b=1$.

De l'équation (10), il s'ensuit :

$$\frac{2\,da^2}{\varepsilon\, b\, a^2 \sin\gamma} = dt.$$

Tenant compte de la dernière équation et de l'équation (20), nous obtenons :

$$dt = \pm\frac{24}{\varepsilon}\left[144\,b^2a^4 - \left(48\,c - 9\,c_1a^4 - 5\,c_2a^6 + \frac{48}{\varepsilon}a^2 - \frac{24\,\alpha}{\varepsilon}a^2\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} da^2. \qquad (21)$$

De la formule (21) il est possible de déduire numériquement la période de a.

Enfin, résolvons l'équation (7) :

$$x_1 = -\frac{ab}{2(2+\alpha)\alpha}\cos[(1+\alpha)t - \Phi] - \frac{c_1 a^3}{32}\cos 3(t-\Phi) -$$

$$-\frac{c_2 a^5}{384}\cos 5(t-\Phi) - \frac{5c_2 a^5}{128}\cos 3(t-\Phi) + \frac{d_1 a^2}{2} +$$

$$+\frac{d_1 a^2}{6}\cos 2(t-\Phi) - \frac{d_2 a^4}{120}\cos 4(t-\Phi) + \frac{d_2 a^4}{6}\cos 2(t-\Phi) + \frac{3d_2 a^4}{8}. \qquad (22)$$

Nous obtenons ainsi la perturbation x_1, qui ne contient que des oscillations ayant une fréquence qui est un multiple de la fréquence fondamentale du terme principal $a\cos(t-\Phi)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Klotter, K. u. Kotowski, G., *Über die Stabilität der Bewegung des Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt*, ZAMM, *19*, 289–296, 1939.
2. Klotter, K., *Technische Schwingungslehre*, Bd I, 2 Aufl., Springer-Verlag, Berlin (Göttingen) Heidelberg, 355, 1951.
3. Hirsch, P., *Das Pendel mit oszillierendem Aufhängspunkt*, ZAMM, *10*, 41–52, 1930.
4. Erdelyi, A., *Über die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhänge punkt*; ZAMM, *16*, 171–182, 1936; ZAMM, *14*, 435, 1934.
5. Liebold, R., *Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt*, *Freiberger Forschungshefte*, C *29*, 33, 1956.
6. Haacke, W., *Bemerkungen zur Stabilisierung eines physikalischen Pendels*, ZAMM, *31*, 161–169 und 333–338, 1951.
7. Gradewald, R., *Das Stabiuitätsverhalten eines Pendels mit oszillierender Drehachse unter Berücksichtigung der nichtlinearen Rückstellkräfte*, Ann. der Physik, *17*, 68–76, 1966.
8. Gradewald, R. und Moldenhauer, W., *Untersuchung der Stabilität des parametererregten Pendels als speziellen rheonichtlinearen Schwinger*, Ann. der Physik. *27*, 359–364, 1971,
9. Struble, R. A., *Oscillations of a Pendulum unter Parametric excitation*, Quart. Appl, Math., *21*, 121–131, 1963.
10. Struble, R. A., *On the subharmonic oscillations of a pendulum*, Trans. ASME Ser E, *30*, nr. 2, 1963.
11. Struble, R. A., *On the oscillations of a pendulum under parametric excitation*, Quart. Appl. Math., *22*, 157–159, 1964.
12. Kapitsa, P. L., *Dynamical stability of a pendulum with a vibrating point of suspension*, ZHETF, *21*, nr. 5, 1951.
13. Skalak, R. and Yarymovych, M. I., *Subharmonic oscillations of a pendulum*, J. Appl. Mech. Ser. E, *27*, 159–164, 1960.
14. Caughey, Y. K., *Subharmonic oscillations of a pendulum (discussion)*, J. Appl. Mech. Ser. E, *27*, 754–755, 1960.
15. Struble, R. A., *Nonlinear Differential Equations*, Mc Graw-Hill, N. Y., 1962, Ch 8.

В СВЯЗИ С НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ МАТЬЕ

(РЕЗЮМЕ)

При помощи метода Штрубля исследуются устойчивые и неустойчивые решения уравнения (I).

ASUPRA UNEI ECUAȚII NELINIARE MATHIEU

(REZUMAT)

Se studiază cu ajutorul metodei lui Struble soluțiile staționare și nestaționare ale ecuației (1).

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE CICLIQUE NON LINÉAIRE

PAR

O. EM. GHEORGHIU

Dans l'Article [1], P. M. Vasić et R. R. Janić ont déterminé la solution générale réelle de l'équation fonctionelle

$$f(x_1)\,g(x_2, x_3, x_4)+f(x_2)\,g(x_3, x_4, x_1)+f(x_3)\,g(x_4, x_1, x_2)+f(x_4)\,g(x_1, x_2, x_3)=0. \quad (1)$$

Dans cette Note on donne la solution générale réelle de l'équation fonctionelle cyclique non linéaire

$$f(x_1)\,g(x_2, x_3, x_4)+f(x_2)\,g(x_3, x_4, x_1)+f(x_3)\,g(x_4, x_1, x_2)+f(x_4)\,g(x_1, x_2, x_3)=$$
$$=\alpha f(x_1)\,f(x_2)\,g(x_2, x_3, x_4)\;\;g(x_3, x_4, x_1)\;\;[f(x_3)\,g(x_4, x_1, x_2)+f(x_4)\,g(x_1, x_2, x_3)]+$$
$$+\alpha f(x_3)\,f(x_4)\,g(x_4, x_1, x_2)\,g(x_1, x_2, x_3)\;\;[f(x_1)\,g(x_2, x_3, x_4)+f(x_2)\,g(x_3, x_4, x_1)] \quad (2)$$

où $f: R\to R$, $g: R^3\to R$ sont les fonctions inconues et $\alpha \in R$ est une const. arbitraire. (Pour $\alpha=0$ on obtient (1)).

Si on y pose $x_1=x_2=x_3=x_4=x \in R$ on obtient les relations

$$f(x)\equiv 0, \quad (3)$$

$$g(x, x, x)\equiv 0 \text{ et } f(x)\neq 0, \quad (4)$$

$$3-4f^2(x)\cdot g^2(x, x, x)\cdot\alpha\equiv 0. \quad (5)$$

Dans l'hypothèse (3) on obtient la solution triviale pour (2)

$$f(x)\equiv 0\,;\quad g(x, y, z)=\text{ quelconque}\,;\qquad \forall\,\alpha \in R. \quad (6)$$

Une autre solution triviale pour l'équation (2) est

$$f(x)=\text{quelconque}\,;\quad g(x, y, z)\equiv 0\,;\qquad \forall\;\alpha \in R. \quad (7)$$

Dans l'lypothèse (4) l'équation fonctionnelle (2) conduit aux trois cas suivants :

$$f(x_1)\,g(x_2, x_3, x_4)+f(x_2)\,g(x_3, x_4, x_1)+f(x_3)\,g(x_4, x_1, x_2)+f(x_4)\,g(x_1, x_2, x_3)=0,\ \ldots$$
$$\ldots\ (\alpha=0)\,; \quad (8)$$

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4)+u(x_2, x_3, x_4, x_1)+u(x_3, x_4, x_1, x_2)+u(x_4, x_1, x_2, x_3)=0, \quad (9)$$

avec $\alpha=-m^2$, où

$$mf(x_1)\, g(x_2, x_3, x_4)=\operatorname{th} u(x_1, x_2, x_3, x_4)\,; \tag{9'}$$

$$v(x_1, x_2, x_3, x_4)+v(x_2, x_3, x_4, x_1)+v(x_3, x_4, x_1, x_2)+v(x_4, x_1, x_2, x_3)=0, \tag{10}$$

avec $\alpha=m^2$, où

$$mf(x_1)\cdot g(x_2, x_3, x_4)=\operatorname{tg} v(x_1, y_2, x_3, x_4),\ v(x, y, z, t)\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{10'}$$

La solution générale de l'équation fonctionnelle (8) est (voir [1], p. 56, eq. (16))

$$f(x)=F(x) \tag{11}$$

$$g(x, y, z)=F(x)\, G_1(y, z)-F(z)\, G_1(x, y)+F(y)\,[G_2(z, x)-G_2(x, z)]$$

où $F: R\to R$; $G_1,\ G_2: R^2\to R$ sont trois fonctions réelles arbitraires. Pour (8) nous avons aussi les solutions triviales (6) et (7).

La solution générale de l'équation fonctionnelle (9) est connue, mais pour avoir lieu la relation (9') faut que la fonction $u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ soit independente de premier argument. Donc

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4)\equiv\varphi(x_2, x_3, x_4). \tag{12}$$

Alors la solution générale de (9) et (9') s'écrit (avec $\alpha=-m^2$)

$$f(x)\equiv\text{const.}$$

$$mf(x_1)\cdot g(x_2, x_3, x_4)=\operatorname{th}\,[A(x_3, x_4)-A(x_2, x_3,)+B(x_4, x_2)-B(x_2, x_4)] \tag{13}$$

où $A,\ B: R^2\to R$, sont deux fonctions réelles arbitraires et $m\in R$, quelconque.

Si on considère maintenant l'équation fonctionelle (10) dans l'hypothèse $\alpha=m^2$, $m\in R$, et avec la transformation (10') on obtient la solution générale pour (2)

$$f(x)\equiv\text{const.}$$

$$mf(x_1)\, g(x_2, x_3, x_4)=\operatorname{tg}\,[A(x_3, x_4)-A(x_2, x_3)+B(x_4, x_2)-B(x_2, x_4)] \tag{14}$$

où $A,\ B: R^2\to R$ sont fonctions quelconque et $m\in R$, arbitraire.

Si maintenant considerons l'hypothèse (5) pour l'équation fonctionnelles (2) résulte que (5) a lieu si et seulement si $f(x)\equiv$const. $\forall x\in R$ et $\alpha>0$. Alors la solution pour (2) est constante aussi pour la fonction

$$g(x, y, z)\ \text{ const.},\qquad \forall x\in R,\quad \forall y\in R,\quad \forall z\in R$$

Si l'on revient à l'équation fonctionnelle cyclique non linéaire (2) on arrive au résultat suivant :

Théorème. La solution générale réelle de l'équation fonctionnelle cyclique non linéaire (2) est donné par (6) pour $\forall\alpha\in R$ et l'hypothèse (3) ; par (11) pour $\alpha=0$ et l'hypothèse (4) ; par (13 pour $\alpha=-m^2$, $m\in R$, et l'hypothèse (4) ;

par (14) pour $\alpha = m^2$, $m \in R$ et l'hypothèse (4); par $f(x) \equiv$const. et $g(x, y, z) \equiv$ $\equiv$const. dans l'hypothèse (5) et la solution triviale (7) pour $\forall \alpha \in R$.

Dans la solution générale il y a fonctions arbitraires et constantes arbitraires.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. M. Vasić and R. R. Janić, *On some functional equations*, Publ. Fac. d'Electrot de l'Univ. à Belgrade Nr. 330–Nr. 337 (1970), pp. 55–62.

В СВЯЗИ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЦИКЛИЧЕСКИМ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ

(РЕЗЮМЕ)

Дается общее действительное решение уравнения (2), обобщающего уравнение (1) изученного П. М. Васичем и Р. Р. Яничем в [1].

ASUPRA UNEI ECUAȚII FUNCȚIONALE CICLICE NELINIARE

(REZUMAT)

Se dă soluția generală reală a ecuației (2), care generalizează ecuația (1) studiată de P. M. Vasici și R. R. Janici în [1].

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

EINE SPEZIELLE KLASSE VON SCHWACHEN LOOPS (II).

VON

J. TĂUBER

2. EINIGE TOPOLOGISCHE EIGENSCHAFTEN VON S-LOOPS

Es sei X eine Kette auf der eine linke S-Loop $(X, *)$ definiert ist. In X führen wir die *Ordnungstopologie* wie folgt ein: Die Mengen $\{x \mid x<a \vee x>b;\ a, b, x \in X\}$ bilden eine Subbasis einer Topologie, die Ordnungstopologie benannt wird. Die Basis dieser Topologie bilden, die oben angeführten Mengen und die offenen Intervalle $(a, b)=\{x \mid a<x<b;\ a, b, x \in X\}$. Diese Topologie wird auch noch *Intervalltopologie* benannt. Wie bekannt [6], ist dann X ein normaler *Hausdorffscher Raum*, in dem jede konvergente Folge einen einzigen Grenzwert besitzt [4].

Wir beweisen nun einige Sätze, die für die nächsten Arbeiten von besonderer Bedeutung sind.

Satz 2.1. Ist die Folge (x_n) aus L monoton und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0 \in L$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n * a)=(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) * a \in L$, wobei L der positive Kegel einer linken S-Loop ist.

B e w e i s. Wir nehmen an, daß die Folge (x_n) aus L monoton steigend gegen x_0 konvergent sei. Es genügt zu zeigen, daß für jedes $c<x_0 * a$, $c \in L$, ein $n_0 \in N$ existiert, daß $c<x_n * a<x_0 * a$, $\nmid n \geqslant n_0$.

Es sei nun $c \in L$ beliebig. Wir verfeinern die zu zeigende Bedingungsgleichung in dem c so angenommen wird, daß $a<c<x_0 * a$ (natürlich existiert immer c). Weil $c>a$, folgt $c=a' * a$. Aus $c<x_0 * a$ folgt $a'<x_0$. Die Folge (x_n) ist steigend konvergent gegen x_0 d.h. daß es immer ein $n_0 \in N$ gibt, so daß $a'<x_n<x_0$ für jedes $n \geqslant n_0$. Daraus ergibt sich $a' * a<x_n * a<x_n * a$ und folglich für jedes $c \in L$ ist $c<x_0 * a$, folglich $x_n * a \in (c, x_0 * a)$ für jedes $n \geqslant n_0$.

Satz 2.2. Die Folge (a_n) ist gegen e konvergent, wenn L der positive Kegel einer linken arhimedischen und vollständigen S-Loop $(X, *)$ ist, wobei a_n die Wurzel der Gleichung $x^n=a \in L$ ist.

B e w e i s. Im Falle $a=e$ ist die Aussage trivial. Es sei nun $a \neq e$, $a \in L$. Die Folge (a_n) ist monoton fallend, da aus $a_{n+1}^n<a_n^n=a$ die Ungleichung $a_{n+1}<a_n$ folgt. Wäre c nicht der Limes, so müßte es wenigstens ein $b \in L$ geben, so daß $b<a_n$, $\nmid n \in N$. Daraus folgt, daß $b^n<a$, $\nmid n \in N$. Andererseits ist $(X, *)$ arhimedisch und somit existiert wenigstens ein $n' \in N$, so daß $b^{n'}>a$. Dies widerspricht der Schlußfolgerung $b^n<a$, $\nmid n \in N$ und somit ist Satz 2.2 bewiesen.

Daraus ergibt sich folgender

Satz 2.3. Die Folge von Intervalle $(a, b)=(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots$ $\ldots, (a_n, b_n)$, aus L, sind nicht alle disjunkt, falls L der positive Kegel einer arhimedischen und vollständigen linken S-Loop $(x, *)$ ist, wobei a_n und b_n die Lösungen der Gleichungen $x^n=a\neq e$, bzw. $y^n=b$, $a, b \in L$, $n \in N$.

B e w e i s. Wir zeigen, daß es ein $n_0 \in N$ gibt, so daß $b_n > a_{n-1}, \forall n \geqslant n_0$, $n \in N$. Damit diese Bedingung erfüllt ist, muß man zeigen daß ein $n_0 \in N$ existiert, so daß

$$(*) \quad b_n * a < b, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad n \in N.$$

Nehmen wir an, daß es ein n_0 gibt, so daß $b_n > a_{n-1}, \forall h \geqslant n_0$, $n \in N$. Daraus ergibt sich $a_{n-1}^{n-1} < b_n^{n-1}$ d.h. $a < b_n^{n-1}$ bzw. $b_n * a < b_n * b_n^{n-1} = b_n^n = b$ für $\forall n \geqslant n_0$, $n \in N$. Wir zeigen, nun daß diese Bedingung auch hinreichend ist. In der Tat aus der Bedingung $(*)$ folgt ähnlich wie oben $b_n > a_{n-1}$, $\forall n \geqslant n_0$, $n \in N$.

Wir zeigen nun, daß die Bedingung $(*)$ erfüllt ist. Da $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = e$ (Satz 2.2) folgt, daß es für jedes $c > e$ ein $n_0 \in N$ gibt, so das $e < b_n < c$, $\forall n \geqslant n_0$. Daraus ergibt sich $a < b_n * a < c * a$ und weil c beliebig ist, kann man c so annehmen, daß $c * a < b$. Tatsächlich, aus $b > a$ folgt, daß es ein $\bar{c} \in L$ gibt, so daß $b = \bar{c} * a$. Nun nehmen wir $c < \bar{c}$ (c existiert, weil e ein Häufungspunkt von L ist). Daraus folgt, daß die Bedingung $(*)$ erfüllt ist.

A n m e r k u n g 2.1. Da $b_{n+1} < b_n$, folgt, daß das Intervall (a_{n+1}, b_{n+1}) mit (a_n, b_n) nicht disjunkt ist usw., wenn $n \geqslant n_0$ d.h. daß alle Intervalle (a_n, b_n), angefangen vom Rang $n_0 - 1$ wenigstens mit dem nächstfolgenden Intervall nichtdisjunkt ist.

Eine Untermenge $Y \subset X$ ist eine *in sich dichte* Menge [2], [4], venn $Y \subset Y^d$, wobei Y^d die Menge der Häufungspunkte von Y ist Y^d heißt die Ableitung der Menge Y. Ist in einem topologischen Raum X in X^d enthalten, so ist er *in sich dicht*.

Satz 2.4. Ist $(X, *)$ eine arhimedische und vollständige linke S-Loop, dann ist L ein in sich dichter topologischer Raum.

B e w e i s. Nach Satz 2.3 existiert immer eine gegen e konvergente Folge, die fallend ist. Es sei $u \in L$ ein beliebiger Punkt. Die Folge $(a_n * u)$ ist, nach Satz 2.1 gegen u konvergent und somit ist u ein Häufungspunkt von L.

Der *Kehrsatz* ist im allgemeinen nicht wahr. Tatsächlich gibt es in sich dichte topologische Räume, auf denen man S-Loops definieren kann, die arhimedische und nicht vollständig sind. Als Beispiel führen wir folgendes an: Sei $L = \{x \mid x \geqslant 1, x \in Q\}$; Q ist die Menge der rationalen Zahlen. $(L, \cdot)$ ist nicht vollständig, weil es keine rationale Zahl x gibt, so daß $x^2 = 2$ d.h. L ist nicht vollständig, obzwar L in sich dicht ist.

Satz 2.5. Ist $(X, *)$ eine arhimedische und vollständig linke S-Loop, dann existiert in seinem positiven Kegel eine abzählbare Untermenge H, für die es gilt:

– $(H, *)$ ist eine kommutative natürlich angeordnete, arhimedische und vollständige Halbgruppe mit Einselement

– H ist dicht in L

– H ist in sich dicht.

Beweis. Es sei $x \in L$ ein beliebiges Element und $H := \{x^p \mid p \in Q_+^0\}$. Unter $x^{1/n}$ verstehen wir die Lösung der Gleichung $a^n = x$, bzw. $x^{m/n} := (x^{1/n})^m$. H ist eine abzählbare Untermenge von L. Wir zeigen nun, daß $(H, *)$ eine vollständige linke S-Loop ist. Die Axiome A_2 $(e = x^0)$, A_3 und A_4 sind in L erfüllt und deshalb sind sie auch in H erfüllt. Ferner nehmen wir $u, u' \in H$ beliebig an. Wir setzen voraus, daß $u' > u$. Natürlich gibt es ein $u'' \in L$, so daß $u' = u'' * u$. Da $u, u' \in H$, folgt, daß $u' = x^{m/k}$ und $u = x^{n/k}$; $m, n, k \in N$ und $m > n$. Weiter gilt $x^{(m-n)/k} * x^{n/k} = x^{m/k}$. Daraus und aus $u' = u'' * u$ ergibt sich, daß $u'' = x^{(m-n)/k}$ und folglich $u'' \in H$. Somit ist auch A_1 erfüllt. Die Struktur $(H, *)$, wie leicht nachgeprüft werden kann, ist sowohl kommutativ, als auch assoziativ und somit ist $(H, *)$ eine kommutative natürlich angeordnete vollständige und arhimedische Halbgruppe.

Nach Satz 2.4 ist H ein in sich dichte Menge und gleichzeitig auch dicht in L. Denn wäre H nicht dicht in L, dann würde es ein Intervall (a, b) mit $a, b \in H$ so geben, daß $(a, b) \cap L = 0$. Satz 1.9 sagt dann, daß $(L, *)$ von einem einzigen Element erzeugt wird und somit nicht vollständig sein kann.

Satz 2.6. Hat L eine stetige Ordnung und ist L der positive Kegel einer arhimedischen linken S-Loop $(X, *)$, dann ist L einem Intervall von der Form: $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$ $(-\infty, a]$; $a, b \in R$ ähnlich.

Beweis. Nach Satz 1.11 ist $(L, *)$ eine vollständige linke S-Loop, weil L eine stetige Ordnung hat. Der vorhergehende Satz besagt, daß es eine in L dichte Untermenge H gibt. Nach Satz 4 und Bemerkung 4 aus [2], s. 39 ist somit Satz 2.6 bewiesen.

Satz 2.7. Ist $(X, *)$ eine arhimedische S-Loop in der der positive Kegel L eine stetige Ordnung besitzt, dann ist $(L, *)$ eine natürlich angeordnete und vollständige Halbgruppe mit Einselement.

Beweis. Nach Satz 2.5 ist die die Untermenge $H := \{a^p \mid p \in Q_+^0, a \in L\}$ dicht in L, weil $(L, *)$ vollständig ist, da L eine stetige Ordnung besitzt. Mit $\widehat{H}$ bezeichnen wir die Erweiterung von H, in dem wir zu H alle die durch die Dedekinschen Schnitte bestimmten Elemente hinzufügen. Evident $\widehat{H} = L$. Somit bekommt a^t einen Sinn für jedes $t \in R_+^0$. Daraus folgt

$$L = \{a^t \mid t \in R_+^0,\ e \neq a \in L\}.$$

Die Funktion $f : L \to R_+^0$ definiert, durch $f(x) = f(a^t) = t$, bestimmt einen Isomorphismus zwischen $(L, *)$ und $(R_+^0, +)$. Somit ist Satz 2.7 erfüllt.

Satz 2.8. In jeder arhimedisch linken S-Loop $(X, *)$ ist $(L, *)$ eine natürlich angeordnete kommutative Halbgruppe mit Einselement.

Beweis. Hat L eine nicht dichte Ordnung, dann ist Satz 2.8 richtig (Satz 1.8), bzw. hat L eine stetige Ordnung, dann ist wieder Satz 2.8 richtig (Satz 2.7).

Nehmen wir nun an, daß L eine dichte Ordnung besitzt. Wir bezeichnen mit $\widehat{L}$ die Erweiterung von L, in dem man die durch die Dedekinsche Schnitte von L zu hinzufügt. Natürlich kann man die Struktur $(L, *)$ erweitern uzw.

$(\widehat{L}, *)$ durch die Dedekinsche Methode definieren. Nach Satz 2.7 ist $(\widehat{L}, *)$ eine natürlich angeordnete vollständige und kommutative Halbgruppe, die wie folgt dargestellt werden kann:

$$\widehat{L} = \{a^t \mid t \in R_+^0, \quad e \neq a \in L\}$$

(Natürlich kann auch $a \in \widehat{L} / L$ angenommen werden, dies gestattet aber nicht, den Satz vollständig zu beweisen).

Anmerkung 2.2. Natürlich sind die gefundenen Eigenschaften der positiven Kegel L, nicht auf der ganzen Loop $(X, *)$ erfüllt, bzw. auch der negative Kegel erfüllt nicht alle Eigenschaften. Wir führen diesbezüglich nur die Anmerkung 1.1 an.

Es können noch andere Eigenschaften von S-Loop bzw. ihrer positiven Kegel hergeleitet werden. Sie werden in den weiteren Arbeiten nicht verwendet und deshalb lassen wir sie hier außer acht.

LITERATURVERZEICHNIS

1. A. D. Alexandrov, *A certain generalization of the functional equation* $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Siberian Math. J. 11 (1970), 198–209 *oder die Originalarbeit in russ. Sprache aus: Sibirsk.* Mat. J. 11 (1970), 264–274.
2. P. S. Alexandroff, *Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin (1967).
3. L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems* (in russischer Übersetzung) Moskau 1965.
4. K. Kuratonski, *Topology I* (in russischer Übersetzung) Moskau 1966.
5. L. Rédei, *Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen.* Leipzig 1963.
6. G. Szász, *Einführung in die Verbandstheorie*, Budapest 1962.
7. J. Täuber, *Eine neue Klasse von Lösungen einer Funktionalgleichung.* Bul. st. şi tehn. Inst. Polit. „Tr. Vuia" Timişoara 16 fasc. 2 (1971).
8. J. Täuber, *Über die Lösungen einer von A. D. Alexandrov verallgemeinerten Cauchschen Funktionalgleichung* Anal. Univ. Timişoara IX fasc. 2, 1973, 175–183.
9. J. Täuber, *Contribuţii la soluţionarea unor ecuaţii functionale Cauchy pe o clasă specială de loopuri slabe.* Dissertation 1972 Timişoara.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС СЛАБЫХ ЛУПОВ (II)

(РЕЗЮМЕ)

Во второй части работы исследуются некоторые топологические свойства лупов определенных в первой части.

O CLASĂ SPECIALĂ DE LOOPURI SLABE (II)

(REZUMAT)

În partea a II-a lucrării se studiază unele proprietăţi topologice ale S-loopurilor definite în prima parte a lucrării.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

CONTRIBUTIONS TO THE QUANTUM TRANSITIONS OF THE GENERALIZED HARMONIC OSCILLATOR

BY

M. BORNEAS, M. DAVID, I. MIRON, M. CRISTEA, I. DAMIAN

In a previous paper [1] a general report was made of the problem of quantum transitions of systems governed by the quantum equation with higher derivatives [2]:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\sum_j\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_j^2}-\frac{\omega^2\hbar^2}{2\mu}\sum_j\frac{\partial^2\Psi}{\partial\dot{x}_j^2}+U\Psi=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{1}$$

wherein: $j=1, 2, 3$ and μ is the mass. Here it is suggested to compute an actual case, namely the probability of transition of a harmonic oscillator, under the effect of light, in the frame of generalized quantum mechanics, taking note that the harmonic oscillator intervenes in various applied problems, the physics of solids included.

In general, in the expression for the probability of transition, the coordinate matrix intervenes [1]:

$$x_{nm}=\int d\tau\,\psi_n^{0*}\,x\,\psi_m^0 \tag{2}$$

wherein ψ_k^0 are the eigen-functions of the equation:

$$H^0\psi^0=E\psi^0 \tag{3}$$

H^0 being the unperturbed Hamiltonian, and integration is made over all of the coordinates and their derivatives. In the case of the generalized harmonic oscillator, equation (3) runs:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi^\circ}{\partial x^2}-\frac{\omega^2\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi^\circ}{\partial\dot{x}^2}+\frac{\mu\omega^2x^2}{2}\psi^\circ=E\psi^\circ \tag{4}$$

This equation has been solved previously [3] and its solutions are:

$$\psi^\circ=N_n\exp\left(\pm i\frac{\sqrt{2\mu E'}}{\hbar\omega}\dot{x}\right)H_n\exp\left(-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2\right) \tag{5}$$

H_n being the Hermite polynomials and N_n the normalization factor, and

$$E'=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)-E \tag{6}$$

where E is interpreted as being the energy of the generalized harmonic oscillator.

The problem is now to compute the matrix elements (2) with a knowledge of the functions (5). Since no restrictions are imposed upon E', the functions ψ° apparently embody a continuos spectrum. By an adequate interpretation, however, of equation (6), this shortcoming is eliminated.

Since that portion of eq. (4) which determines E' is not depending upon the quantum number n [3], consider that E' is constant with each of the transitions. This means that the possible transitions continue to depend on n, thus embody a discrete spectrum.

With the functions (5) the matrix elements (2) can be written in the following form:

$$x_{nm}=\int d\tau\, N_n \exp\left(\mp i \frac{\sqrt{2\mu E'}}{\hbar\omega}\dot{x}\right)$$

$$\times H_n \exp\left(-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2\right)\times N_n \exp\left(\pm i \frac{\sqrt{2\mu E'}}{\hbar\omega}\dot{x}\right) \tag{7}$$

$$\times H_n \exp\left(-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2\right)=\int dx \int d\dot{x} A^2 B_n^2\, x\, H_n^2 \exp\left(-\frac{\mu\omega}{\hbar}x^2\right)$$

where it has been written:

$$N_n = A B_n \tag{8}$$

B_n being the normalization factor of the Hamiltonian's eigen-functions without the coordinate derivatives.

Since the Hermite polynomials are not depending on $\dot{x}$, the matrix elements (7) can be written further as:

$$x_{nm}=A^2\int dx\, B_n^2\, x\, H_n^2 \exp\left(-\frac{\mu\omega}{\hbar}x^2\right)\int d\dot{x}=A^2 I J \tag{9}$$

The notation I applies to the integral over x, and J to the integral over $\dot{x}$. The integral I is known [4] and it is known as well that it is non-zero only for $n-m=\pm 1$. This means that in the matrix (9) too, only those elements are non-zero for which $n-m=\pm 1$, i.e. transitions take place only between neighbouring discrete states. Obviously, in order that the integral J not become infinite, the derivatives $\dot{x}$ are to be restricted to finite values, which from the physical point of view is correct.

Taking into account (6) and the interpretation given to E', it results that only the fundamental frequency is emitted or absorbed by the generalized harmonic oscillator.

REFERENCES

1. Borneas M., David M., Miron I., Cristea M. and Damian I., Bul. Şt. Tehn. I.P.T., mat.-fiz.-mec., 1974.
2. Borneas M., Am. J. Phys., 1972, *40/3*, p. 248.
3. Borneas M., David M., Bul. Şt. Tehn I.P.T., mat-.fiz.-mec., 1973.
4. Spolski E. V., *Fizica atomică*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1953, vol. II.

К КВАНТОВЫМ ПЕРЕХОДАМ ОБОБЩЕННОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

(РЕЗЮМЕ)

В настоящей работе изучается случай квантовых переходов гармонического осциллятора, подвергнутого уравнению обобщеной квантовой механики.

Показывается что и обобщенный гармонический осциллятор может изучать либо абсорбировать лишь фундаментальную частоту.

ASUPRA TRANZIŢIILOR CUANTICE ALE OSCILATORULUI ARMONIC GENERALIZAT

(REZUMAT)

Se studiază cazul tranziţiilor cuantice ale unui oscilator armonic care este guvernat de o ecuaţie a mecanicii generalizate cuantificate. Se arată că şi oscilatorul armonic generalizat poate emite sau absorbi numai frecvenţa fundamentală.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ В СИСТЕМЕ ИЗОМОРФНЫХ ОКИСЛОВ α—Fe_2O_3—Al_2O_3—Cr_2O_3

МИНЕРВА КРИСТЯ

Высокие жароупорные свойства и шлаковая прочность материалов содержащих Cr_2O_3 являются их ценными характеристиками для применения в строительстве сталеварных печей.

Так как $\alpha - Fe_2O_3$, $\alpha - Al_2O_3$ и $\alpha - Cr_2O_3$ могут применяться в качестве главных составляющих этих материалов, выяснение физико-химической природы в работе и предвидение имеющих место взаимодействий требует обширных основных сведений о физическом взаимодействии в третичной системе $\alpha - (Fe, Al, Cr)_2O_3$.

В работе Кайта [1] о системе $MgO - Cr_2O_3 - SiO_2$ доказывается что некоторые трудности появляющиеся при опытах с такими системами могут быть преодолены, хотя третичные системы с Cr_2O_3 обладають большой сложностью, что и побудило расширить данные исследования в 1954г. [2], [3], [4], [5].

По вышеуказанным причинам, а также после систематическом исследовании физических свойств, которые в физике твердого тела начинается со строения, в данной статье рассматриваються физические превращения в системе изомерных сескиокисей с шестиугольной решеткой, $\alpha - Fe_2O_3$, $\alpha - Al_2O_3$ и $\alpha - Cr_2O_3$.

Результаты опубликованные в работе [2] о фазовых соотношениях в интересующей нас третичной системе, выявляют присутствие несмешивающихся зон, границы которых зависят от температуры взаимодействия. Присутствие таких зон подтверждается и в новейших работах [3], [4], [5].

Х. Е. Штейнвер [3] получил составы твердых растворов ограничивающих зоны несмешивания после взаимодействия окисей при 1 200°C графическим методом ; границы зон отличаются от полученных при более высокой температуре [2], [4], [5].

Исследования, результаты которых приводятся в данной статье, преследуют цель установления природы сосуществующих фаз в системе окисей $\alpha - (Fe, Al, Cr)_2O_3$, после взаимодействия окисей в воздухе при температуре 1 250°C с медленным охлаждением, покрывая также область соединений с большим количеством Cr_2O_3 неисследованной Муаном и Сомийа [2] которые проводили свои работы в тех же термических условиях.

ОПЫТНАЯ ЧАСТЬ

1) Получение образцов.

Ввиду осуществления наилучших условий взаимодействия мы остановились на методе приготовления третичных масс изоморфных окисей термическое разложение соосадков гидроокисей, метод гарантирующий высокую степень перемешивания тончайших частиц получающихся при разложении исходных фаз соосадков.

Концентрации смесей хлоридов: $FeCl_3 \cdot 6H_2O$; $CrCl_3 \cdot 6H_2O$; $AlCl_3 \cdot 6H_2O$ приготовленных взвешиванием определялись йодометрическим способом манганометрическим, соответственно комплексоном III и проверены методом гравиметрической дозировки. Результаты полученные различными методами совпадают.

Смеси были приготовлены в пропорциях требуемых химическими составами третичных масс, сопровождаемые соосаждением металлических гидроокисей с гидроокисью аммония при повышенной температуре и при контролируемом pH, с целью количественного осаждения. Полученные соосадки обмывались и после фильтрации высушивались при 200°C. Осадки подвергались обжигу в электропечи в течении 7 часов при 1 110°C, а затем охлаждались медленно в закрытой печи. После этого проводился обжиг в колбе из жаропрочного супераллюминозного материала в течении 7 ч. при 1 250°C, охлаждение также в закрытой печи.

Составы испытанных образцов в процентах молей окислов представлены на рис. 1.

2) Метод исследования.

Образцы третичных окислов полученные после обжига подвергались рентгенографическому анализу при помощи дифрактометра ТУР-М 61, применяя технику измерения импульсов излучений Cu-K счетчиков Гейгер-Мюллера имея в качестве эталона α—Al_2O_3. Работа проводилась при угловой скорости $\Omega = 2°/мин.$, а для некоторых областей повторялась регистрация при $\Omega = 0{,}5°/мин.$

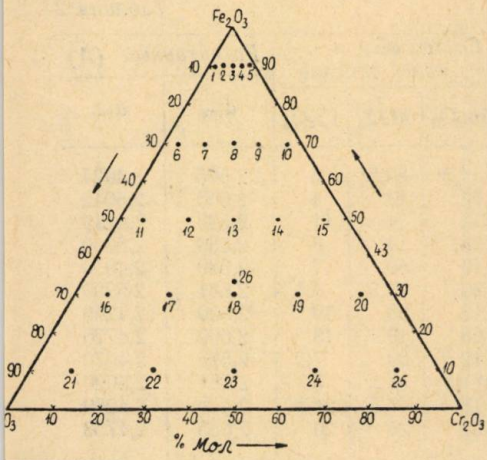
3) Опытные результаты и их обсуждение.

Полученные результаты при дифракции лучей X на порошковых образцах приводятся на рис. 2.

Диффрактограммы X позволили определить межплоскостные растояния d' и d'' в области углов повторно определенных при малой скорости, и которые сопоставляя с линиями чистых окислов [6] предполагались растояниями d_{104} и d_{110} твердых растворов (табл. 1).

Таблица 1, наряду с растояними полученными указанием соответствующих углов, содержит максимумы дифракции и межплоскостные растояния расчитанные по соотношению:

$$d_{hk} = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\,\frac{h^2 + hk + l^2}{a_0^2} + \frac{l^2}{c_0^2}\right)^{1/2}}$$



ис. 1. Составы третичных образцов *(1,2,3 ... 26)* исследованых, в работе.

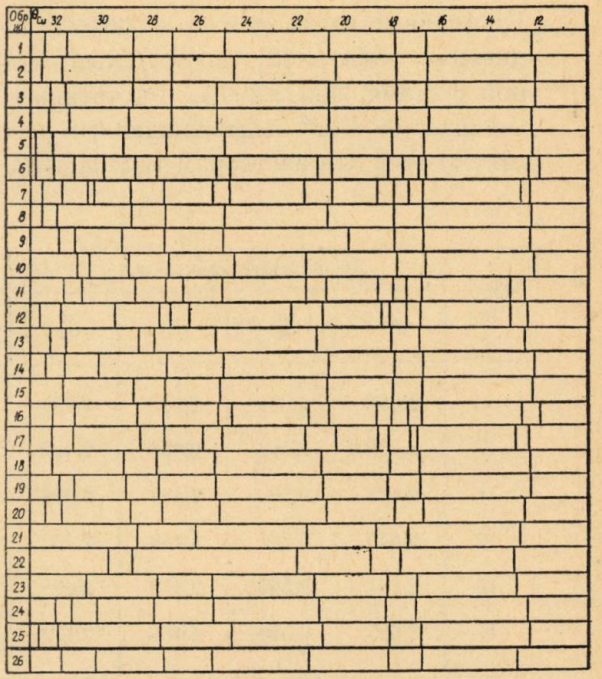


Рис. 2. Рентгенограмма фаз системы: $\alpha - Fe_2O_3 - Al_2O_3 - Cr_2O_3$.

Таблица 1

Обр. но	Экспериментальный				Расчитанный (Å)			
	θ′	θ″	d′(Å)	d″(Å)	d_0	C_0	d_{104}	d_{110}
1	16,71	17,96	2,677	2,496	5,0150	13,680	2,690	2,5075
2	16,66	17,90	2,685	2,504	5,0200	13,680	2,690	2,5100
3	16,66	17,91	2,685	2,503	5,0250	13,690	2,695	2,5125
4	16,66	17,90	2,685	2,504	5,0280	13,695	2,695	2,5140
5	16,75	18,10	2,671	2,477	5,0250	13,700	2,695	2,5120
8	16,81	18,02	2,661	2,488	4,9545	13,600	2,665	2,4772
9	16,81	18,00	2,661	2,491	5,0050	13,610	2,665	2,5025
10	16,71	17,90	2,677	2,504	5,0150	13,640	2,670	2,5075
13	16,94	18,13	2,641	2,473	4,9502	13,485	2,655	2,4751
14	16,76	17,96	2,669	2,496	4,9530	13,540	2,660	2,4765
15	16,86	18,05	2,654	2,484	4,9548	13,595	2,670	2,4774
18	16,96	18,21	2,638	2,463	4,9250	13,415	2,642	2,4625
19	16,92	18,15	2,645	2,471	4,9500	13,483	2,655	2,4750
20	16,77	18,01	2,667	2,489	4,9526	13,580	2,665	2,4763
21	17,45	18,75	2,566	2,394	4,8100	13,155	2,590	2,4050
22	17,37	18,67	2,578	2,404	4,8500	13,225	2,600	2,4250
23	16,96	18,25	2,638	2,458	4,8500	13,325	2,615	2,4270
24	17,05	18,24	2,625	2,459	4,9220	13,440	2,642	2,4610
25	16,87	18,18	2,652	2,467	4,9505	13,540	2,665	2,4752
26	16,71	18,05	2,677	2,484	4,9250	13,440	2,670	2,4650

Постоянные сетки a_0 и c_0 введенные в расчетное соотношение взяты из диаграм работы [3], относительно взаимодйствия окислов в третичной системе, при 1 200°С. Расчитанное отношение d_{104}/d_{110} совпадает с отношением d'/d'', подтверждая что растояния $d'=d_{104}$ и $d''=d_{110}$ соответствуют твердым растворам типа корунд.

Таблиця 2

Обр. но	Экспериментальный (Å)				Состав фаз в % молей окислов			Расчитанный (Å)	
	d_1'	d_2'	d_1''	d_2''	Fe_2O_3	Al_2O_3	Cr_2O_3	d_{104}	d_{110}
6	2,694	2,636	2,515	2,459	12,5 83	82,5 13	5 4	2,575 2,600	2,4037 2,5012
7	2,660	2,566	2,488	2,402	13 78	76 14	11 8	2,590 2,680	2,4137 2,5000
11	2,652	2,566	2,484	2,394	13 82	80 13,5	7 4,5	2,580 2,681	2,4050 2,5020
12	2,645	2,566	2,468	2,400	13 68	68 19	19 13	2,600 2,660	2,4200 2,4770
16	2,654	2,565	2,473	2,395	12,5 81,5	80 13,5	7,5 5	2,595 2,681	2,4070 2,5020
17	2,625	2,580	2,456	2,402	18 55	57,5 25	24,5 20	2,610 2,655	2,4259 2,4758

В таблице 2 приводятся результаты полученные на образцах с двойным количеством интенсивных максимумов в том же угловом промежутке что и образцы табл. 1 и входят в область несмешиваемой фазы указанной в работе [2] и на рис. 3 при 1 250°С.

Расчеты для образцов приведенных в табл. 2 аналогичны расчетам табл. 1. Равенство между d_1/d_1'' и d_2'/d_2'' расчитанными отношениями растояний d_{104}/d_{110}, подтверждает сосуществование двух третичных фаз у этих соединений.

Этот факт соответствует границам несмешиваемой фазы полученной Муаном и Сомийя.

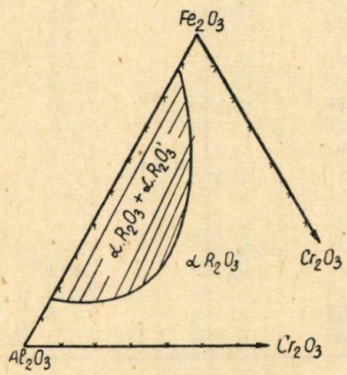


Рис. 3. Фаза несмешиваемости в третичной системе по Муану и Сомийя.

ВЫВОДЫ :

При взаимодействии металлических изоморфных окислов при температуре 1 250°С в воздухе, с медленным охлаждением, в третичной системе α - Fe_2O_3—Al_2O_3—Cr_2O_3 выявляются две области :

— однофразная в которую включаются твердые растворы типа корунд, а также вся область с большим содержанием Cr_2O_3.

— область граничущая с системой α - Fe_2O_3—Al_2O_3, в которой сосуществуют две фазы третичных растворов — образцы 6, 7, 11, 12, 16, 17 — а границы области несмешивания соответствуют некоторым результатам приведенным в литературе [2] и отличаются от границ замороженных фаз от 1 200°С [3].

Из вышеуказанного следует что полученные результаты пополняют данные касающиеся влияния температуры и способа приготовления на устойчивые и на несмешиваемые фазы в системе α - $(Fe, Al, Cr)_2O_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Keith K. L., J. Amer. Ceram. Soc., 1954, 37, p. 490.
2. Muan A., Somiya A., J. Am Ceram. Soc. 1959, 42 p. 603.
3. Steinwehr H. E., Z. Kristallogr., 1967, 125, p. 377.
4. Scharenberg W., *Berichte der Kernforschungsanlage Hulich*, 611 R.X., 1969.
5. Menessy I., Winter F., Berechnung D., Bul. Ştiinţ. şi Tehn. I.P.T., Seria Chimie, 1972 17 (31), p. 133.
6. Минкин, Л. Ж., Справочник по рентгеноструктурному анализу поликристаллов. Госиздат, Физ. Мат. Лит. стр. 430—80 Москва, 1961 г.

TRANSFORMĂRI FIZICE ÎN SISTEMUL OXIZILOR IZOMORFI α - Fe_2O_3 — Al_2O_3 — Cr_2O_3

(REZUMAT)

Prezenta investigaţie utilizează metoda difracţiei razelor X pentru studiul a 26 probe din sistemul ternar al oxizilor metalici izomorfi α - Fe_2O_3 — Al_2O_3 — Cr_2O_3, după interacţiunea fizică a oxizilor la 1 250 °C în aer şi răcirea lentă la temperatura camerei. Datele experimentale asupra naturii fazelor evidenţiază prezenţa a două regiuni :

a) O regiune cu o soluţie solidă ternară cu structură corindonică incluzînd întregul domeniu al amestecurilor bogate în Cr_2O_3.

b) O regiune unde amestecurile se separă în 2 soluţii solide ternare avînd fiecare structură corindonică.

PHYSICAL CHANGES IN THE SYSTEM OF THE ISOMORPHOUS OXIDES α-Fe_2O_3 – Al_2O_3 – Cr_2O_3

(SUMMARY)

The present investigation uses x-Ray Diffraction method to study the 26 samples from the ternary system of the metallic isomorphous oxides α-Fe_2O_3 – Al_2O_3 – Cr_2O_3, according to the physical interaction of the oxides at 1 250 °C in air and the slow cooling at room temperature.

The experimental data on the nature of the phases show the presence of the two regions.

a) One region with one ternary sesquioxide solid solution with corundum structure including the whole range the Cr_2O_3 – rich mixtures.

b) One region where the mixtures decomposes into two separate ternary sesquioxide phases with corundum structure.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

L'ENREGISTREMENT DES FRÉQUENCES PROPRES D'UN RÉSONATEUR Á L'AIDE DES FORCES ONDOSTATIQUES

PAR

C. SIMOI

Antérieurement [1], le nom de „forces ondostatiques" fut donné aux certaines forces générées par la superposition des ondes acoustiques stationaires.

Soient deux ondes stationaires déphasées entre elles avec l'angle φ et ayant la même fréquence ν. Leur superposition dans un domain de volume V dans le milieu de propagation de densité ρ, introduisent une énergie potentielle moyenne d'interaction W_{12}:

$$W_{12} = 2\pi\nu^2 \int_V \rho\, A \cdot B \cdot \cos\varphi \, dV \tag{1}$$

où A et B sont les amplitudes des deux ondes [1].

Sur la direction x la force ondostatique sera donc:

$$F_x = -\frac{d}{dx} W_{12}. \tag{2}$$

Un résonateur acoustique suspendu dans une onde stationaire d'amplitude A, entre lui même en vibration avec l'amplitude B et la différence de phase φ. Une force ondostatique prend ainsi naissance, appliquée sur le résonateur. La vibration forcée dans le resonateur a un cos φ qui change le signe lorsque la fréquence du son devient égale à l'une des fréquences propres du résonateur. Simultanément la force ondostatique change le signe en accord avec les relations (1) et (2). Cet effet est utilisé ici à l'enregistrement des fréquences propres du résonateur.

Le dispositif experimental utilisé a été le suivant. (fig. 1).

Un haut parleur de diamètre 50 mm est alimenté d'une tension alternative de fréquence réglable est installé avec la membrane située dans le plan vertical. Un résonateur acoustique R formé par un tuyau sonore de longuer 6 cm et de diamètre 1,6 cm est placé devant le haut parleur à la distance de 10 mm, étant suspendu d'un fil f de torsion étalonné (le moment directeur $=4{,}5 \cdot 10^{-6}$ N.m). Il est equilibré par le contre poids C ainsi qu'il peut tourne r librement dans le plan horizontal.

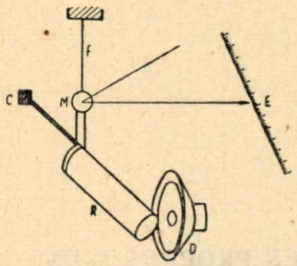


Fig. 1. Le dispositif experimental.

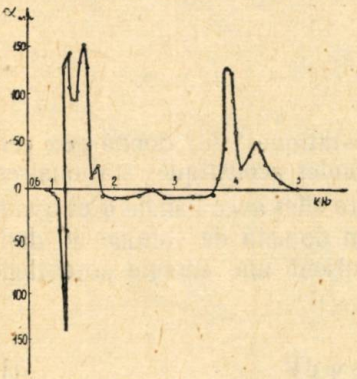


Fig. 2. La dépendance de la déviations α de la fréquence ν du son.

Un miroir M renvoie sur l'echelle E un faisceau de lumière dont les déviations α à la distance de 2,9 m indiquent l'action d'une force ondostatique d'attraction ou de répulsion.

Dans la diagrame de fig. 2 sont présentées les déviations α observées pour differentes valeurs données à la fréquence ν de la tension alternative de 0,5 Volt. La résistance intérieure du haut parleur était de 8 Ohms. Le signe positif de α correspond au sens d'attraction entre le résonateur et le haut parleur.

On peut rémarquer ici l'apparition d'un variation accentuée de la grandeur de la force ondostatique dans les domains de fréquence de la fréquence propre fondamentale du tuyau et de l'harmonique de premier ordre. Ainsi la déviation change le signe pour $\nu = 1{,}2$ kHz et pour $\nu = 3{,}6$ kHz.

La méthode est donc apte à servir pour établir les fréquences propres des résonateurs. La sensibilité du procédé est satisfaisante.

RÉFÉRENCES

1. Simoi C., Rev. Roum. de Phys. tome 19. nr. 4, 1974 p. 371–387.

РЕГИСТРАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ РЕЗОНАТОРА ПРИ ВОЛНОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ

(РЕЗЮМЕ)

Представлен метод измерения собственных частот резонатора, при применении волностатических взаимодействий между ним и акустическим диффузором.

ÎNREGISTRAREA FRECVENȚELOR PROPRII ALE UNUI REZONATOR CU AJUTORUL FORȚELOR UNDOSTATICE

(REZUMAT)

Se prezintă o metodă de măsurare a frecvențelor proprii ale unui rezonator, folosind interacțiunile undostatice dintre el și un difuzor acustic.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

STIMULATED ELECTRON EMISSION OF IMPURIFIED ALUMINIUM SURFACES

BY

P. CRĂCIUN

1. INTRODUCTION

In previous papers [1], [2] we have shown that with aluminium, the strength (I) of the stimulated electron emission can be written as a sum of three exponentials. This statement has been explained assuming the existence of three main varieties of emitting centres located in the surface layer of aluminium samples. The number of emitting centres was affected neither by the inert gas atmosphere the sample was in contact with [3] nor the mode of activation or stimulation of the emissive metal sample [4], [5].

Electron emitting centres of metals have been assigned to the oxide layer [6], [7] on the sample surface, while it has been put forward that no stimulated electron emission can take place when a surface oxide layer is lacking [8].

In the folloving the experimental findings as well as the conclusions arrived at concerning emitting centres of surfaceimpurified aluminium are discussed.

2. METHODS

Electron emitting samples were made of aluminium, in shape of disks (3 cm in radius, 0,4 cm in thickness) and covered by a film of aluminium halide. The halide layer was obtained by attack by chemical action of the disk surface with one of the following acids : HF, HBr, or HI. The acids used were advanced-purity acids (AP). Activation of the samples was by soratching with a wire brusch in the arrangement shown in Fig. 1.

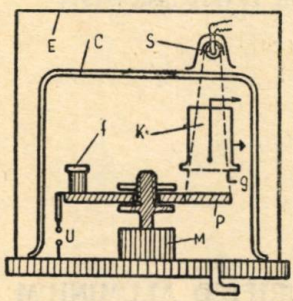


Fig. 1. (*P*) — emitting sample, (*f*) — wire brush, (*M*) electric motor for rotating the sample, (*K*) — counter, (*g*) — grid, (*S*) — electric irradiation bulb, (*c*) — glass bell, (*E*) — opaque bell.

The brush (*f*) is secured se that the wires should contact the sample (*P*) which is rotated by an electric motor (*M*).

The stimulated electron emission was recorded by the aid of a counter (*K*), mounted above the sample and provided with a grid (*g*) (100 meshes/sq. cm). Between the sample (*P*) and the grid (*g*), arranged at 3,5 mm above the sample, a potential difference of 6 V was maintained for acceleration of the electrons emitted by the sample.

Stimulation of the emission was by vertical irradiation of the sample from an electric bulb (*S*) (3 V, 0,6 A) arranged outside of the glass bell (*C*).

The counting gas in the bell (*C*) was a mixture argon-butane 9 : 1 of 70 torr, the self-extinction properties of which have been checked on other occasions too [2–5], [9].

The counter-generated pulses were recorded with the aid of an electronic particle counter type P. P.- 6.

Time-dependence curves of the stimulated electron emission were traced on a semi-log scale, i.e. lg $I=f(t)$. By means of the graphical technique used in nuclear physics for separation of radioisotopes, the curves were decomposed into a sum of exponential functions.

3. RESULTS AND INTERPRETATIONS

For aluminium samples, slightly impurified with a layer of AlF_3, the stimulated electron emission could be written as a sum of four, rather than three exponentials as was the case with samples impurified with natural Al_2O_3, namely :

$$I=\sum_{1}^{4} I_{0i} \exp(-k_i t) \tag{1}$$

where (k_i) is the decay constant of the electron emission, and(t) is the time from the onset of sample activation.

Equation (1) is valid too for stimulated electron emissions in aluminium samples with slight surface impurification by $AlBr_3$ or AlI_3.

In cases where the surface layer of the aluminium sample has been rendered impure by a mixture of AlF_3+AlI_3, the decay curve of the stimulated electron emission could be decomposed into a sum of five exponential functions, i.e. :

$$I=\sum_{1}^{5} I_{0i} \exp(-k_i t) \tag{2}$$

In cases when the emitting samples were covered by a thick layer of aluminium halide or Al_2O_3, the strength of the stimulated electron emission was negligible and comparable to the background current of the arrangement.

Equs. (1) and (2) can be looked upon as an experimental check on the theory of emitting centres [10]. According to this, centres of emission of electrons are capture centres (traps) for electrons, made up of impurities of defects of the surface crystal lattice. In case of non-impurified aluminium samples, three electron trap centres were found, located in the layer of Al_2O_3 naturally existent at the metal surface.

With aluminium samples surface-impurified with AlF_3, $AlBr_3$ or AlI_3, aluminium atoms are formed at the sample surface after activation by scratching. In the working conditions of the arrangement, these atoms undergo a surface oxidation in only fractions of seconds. The three kinds of emitting centres originating from the oxide layer, along with the centre induced by the aluminium halide can explain decomposition of the stimulated electron emission into the four components, according to eq. (1).

The same explanation applies to decomposition of the stimulated electron emission in five components, when the sample has been rendered impure with $AlI_3 + AlF_3$ (see eq. 2).

However, the presence of an oxide or halide layer at the aluminium surface cannot explain by itself the stimulated electron emission. A prove in this sense is the fact that from aluminium samples covered with a thick layer of impurifying substance, the stimulated emission obtained is insignificant. An enhanced emission results when the layer of surface impurities is thinner. The latter finding can be explained in that by tunnelling, trap centres at the sample surface can be more readily populated with free electrons of the metal.

From the above it is obvious that stimulated electron emission of aluminium samples is not affected only by the surface oxide layer, as was believed, but also by surface impurities facilitating population by tunnelling of the electron trap centres in the surface layer of emitting samples. Tunnelling occurs generally with greater probability at the metal – semiconductor junction. Since semiconductor properties are also present in the Al oxide, its major role in the stimulated electron emission is readily comprehensible.

4. CONCLUSIONS

From the above the following conclusions may be drawn:

1) A stimulated electron emission can be obtained from aluminium when its surface is impurified with other substances too rather than only its own oxide layer.

2) Any species of surface impurity may induce one or more kinds of emitting centres. The layer of Al_2O_3 induces three kinds of emitting centres, while only a single emitting centre is induced by each of AlI_3, $AlBr_3$ and AlF_3, respectively.

3) The number (n) of emitting centres affect the timedependent variation of the strength (I) of the stimulated emission, according to a law:

$$I = \sum_{1}^{n} I_{0i} \exp(-k_i t) \tag{3}$$

wherein (k_i) is the time-dependent decay constant of the emitting strength.

REFERENCES

1. Eckey H., Huster E., Z. Phys., 1965, 184, 24.
2. Simoi C., Hrianca I., Crăciun P., Phys. stat. sol., 1968, 29, 761.
3. Simoi C., Crăciun P., Hrianca I., Acta Phys. Polon.., 1965, 28,483.
4. Crăciun P., Anal, Univ. Timişoara, Ser. St. Fiz. chim., 1971, 9, 21.
5. Crăciun P., St. Cerc. Fiz., 1972, 24, 271.
6. Ramsey J. A., Garlick G. F. J., Brit. J. appl. Phys., 1964, 15, 1353.
7. Scharmann A., Seibert G., Z. Phys., 1965, 183, 249.
8. Delchar T. A., J. appl. Phys., 1967, 37, 2 403.
9. Simoi C., Hrianca I., Crăciun P., Tehnica Nucleară, 1968,9, 531.
10. Nassenstein H., Z. Naturf., 1955, 10 a, 944.
11. Crăciun P., Phys. stat. so., 1972, 10 a, 175.

СТИМУЛИРОВАННАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ АЛЮМИНЬЕВНЫХ ПРИМЕСНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(РЕЗЮМЕ)

Анализируется стимулированная электронная эмиссия алюминьевых образцов с поверхностными примесями AlF_3, $AlBr_3$, AlI_3 в составе последних с Al_2O_3.

Устанавливается что интенсивность эмиссии (I) изменяется по закономерности составленной из суммы показательных функций: $I = \sum_{1}^{n} I_{0i} \exp(-k_i t)$. Число ($n$) показательных функций зависит от природы и числа видов примесей на поверхности эмиссионного образца.

EMISIA ELECTRONICĂ STIMULATĂ A SUPRAFEŢELOR DE ALUMINIU IMPURIFICATE

(REZUMAT)

Se analizează emisia electronică stimulată a probelor de Al impurificate superficial cu AlF_3, $AlBr_3$, Al_3 sau amestecuri ale acestora cu Al_2O_3.

Se constată că intensitatea emisiei (I) variază după o lege compusă dintr-o sumă de exponenţiale: $I = \sum_{1}^{n} I_{0i} \exp(-k_i t)$. Numărul ($n$) de exponenţiale depinde de natura şi numărul speciilor de impurităţi de la suprafaţa probei emisive.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

PROBLÈMES DIFFÉRENTIELS POSSÉDANT LA STRUCTURE COMPLEXE. VI, RECHERCHE DES SOLUTIONS SOUMISES AUX CONDITIONS INITIALES CONCERNANT CERTAINS SYSTEMES INTEGRO-DIFFÉRENTIELS NON LINEAIRES AUX OPÉRATEURS PARABOLIQUES (*)

PAR

MM . L. E. KRIVOCHEINE[1], D. MANGERON[2], M. N. OGUZTORELI[3] et GH. SILAŞ[4]

A MAURO PICONE, *membre d'honneur de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie et docteur honoris causa de l'Université de Bucarest, pour son 90e anniversaire*

1. UNICITÉ, EXISTENCE ET APPROXIMATION DES SOLUTIONS DU PROBLÈME.

Considérons dans ce qui suit a classe suivante d'équations intégro-différentielles non linéaires aux opérateurs paraboliques

$$u''_{tt}(x,t)=f\,[x,t,u(x,t),u'_t(x,t)],$$

$$\int_a^x M\,(x,t,\xi,u\,(\xi,t),u'_t\,(\xi,t))\,d\xi,\int_a^t \mathfrak{K}\,(x,t,\tau,u\,(x,\tau),u'_\tau\,(x,\tau))\,d\tau], \qquad (1)$$

où la fonction inconnue $u\,(x,t)$ est soumise aux conditions initiales

$$u_t^{(i)}\,(x,\alpha)=\zeta_i\,(x), \qquad (i=0,\ 1) \qquad (2)$$

et où encore les fonctions $\zeta_i\,(x)$ $(i=0,\ 1)$, $f\,(x,t,v_1,v_2,v_3,v_4)$, $M\,(x,t,\xi,v_5,v_6)$ et $\mathfrak{K}\,(x,t,\tau,v_7,v_8)$ sont définies et continues dans le domaine

$$\mathfrak{D}=\{a\leqslant x,\ \xi\leqslant b,\quad \alpha\leqslant t,\ \tau\leqslant\beta,\ \ 0\leqslant|v_i|\leqslant r_i=\text{const},\ \ i=\overline{1,8}\}$$

et y sont lipschitziennes par rapport aux paramètres v_i $(i=\overline{1,8})$.

---

* The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada under Grant N.R.C.-A 4345 through the University of Alberta.

1 Université d'Etat de la R.S.S. de Kirgizie, Frunze, U.R.S.S.
2 Institut Polytechnique de Jassy, Iaşi, R.S. de Roumanie.
3 Departement of Mathematics, University of Alberta, Edmonton Alberta, Canada.
4 Institut Politechnique „Traian Vuia" de Timişoara, R.S. de Roumanie.

Soient $L_{if}(x,t)$ $(i=\overline{1,4})$, $L_{iM}(x,t,\xi)$, $L_{i\mathfrak{K}}(x,t,\tau)$ $(i=1,2)$ les coefficients de Lipschitz correspondants supposés continus et non negatifs dans $\mathfrak{D}$.

Tout en soulignant le fait qu'un nombre de problèmes récents, tels par ex. [4] – [6], s'encadre dans nos études concernant les systèmes différentiels possédant la structure complexe [1] – [4], [9] – [12], et dont une bonne partie puise à la source de l'oeuvre géniale de M. M. Picone [7] – [8], proposons nous de résoudre le problème posé à la suite de l'application de la théorie des équations intégrales non linéaires.

En faisant le changement de la fonction inconnue, défini par

$$u_t'=z(x,t) \tag{3}$$

et en choisissant pour norme la définition qui suit

$$\|\cdot\|=\max_{\mathfrak{D}}|\cdot|,$$

on obtient

$$u(x,t)=\zeta_0(x)+\int_\alpha^t z(x,\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

En opérant sur (4) par l'opérateur intégro-différentiel non linéaire (1) on obtient l'équation intégrale non linéaire équivalente au problème initial (1), (2)

$$z(x,t)=\zeta_1(x)+\int_\alpha^t f\Big[x,\theta,\zeta_0(x)+\int_\alpha^\theta z(x,\tau)\,d\tau, z(x,\theta),$$

$$\int_\alpha^x M\Big(x,\theta,\xi,\zeta_0(\xi)+\int_\alpha^\theta z(\xi,\tau)\,d\tau, z(\xi,\theta)\Big)\,d\xi, \int_\alpha^\theta \mathfrak{K}(x,\theta,\tau,\zeta_0(x)+$$

$$+\int_\alpha^\tau z(x,\tau)\,d\tau, z(x,\tau))\,d\tau]\,d\theta \equiv A[z]. \tag{5}$$

Soient $z_1(x,t)$ et $z_2(x,t)$ deux fonctions arbitraires continues et continuement différentiables dans le domaine $\mathfrak{D}$ par rapport à la variable t. On en déduit

$$\|A[z_2]-A[z_1]\| \leqslant \|\int_\alpha^t \{L_{1f}(x,\theta)(\theta-\alpha)+L_{2f}(x,\theta)+$$

$$+L_{3f}(x,\theta)\int_\alpha^x [L_{1M}(x,\theta,\xi)(\theta-\alpha)+L_{2M}(x,\theta,\xi)]\,d\xi+$$

$$+L_{4f}(x,\theta)\cdot\int_\alpha^\theta [L_{1\mathfrak{K}}(x,\theta,\tau)(\tau-\alpha)+L_{2\mathfrak{K}}(x,\theta,\tau))]\,d\tau\}\,d\theta\|\cdot$$

$$\cdot\|z_2-z_1\| \equiv \gamma\|z_2-z_1\|. \tag{6}$$

D'où le suivant

Théorème 1. *Dans les conditions ci-dessus, l'équation intégrale non linéaire* (5) *possède dans* $\mathfrak{D}$, *pour* $\gamma<1$, *une solution unique continue* $z=z(x,t)$ *douée de dérivée continue* $z'_t(x,t)$ *et par suite le probléme* (1), (2) *a dans le même domaine* $\mathfrak{D}$ *une solution continue unique ayant la première et la seconde dérivées par rapport á la variable t continues dans* $\mathfrak{D}$.

On aboutit sans difficulté à cet autre

Théorème 2. *Les solutions approchées de l'équation* (5) *s'obtiennent à la suite de l'application des itérations de Picard*

$$z_n(x,t)=A[z_{n-1}],\ n=1,2,\ldots \tag{7}$$

et donc les solutions approchées correspondantes du problème (1), (2) *sont données par*

$$u_n(x,t)=\zeta_0(x)+\int_\alpha^t z_n(x,\tau)\,d\tau\ ,\ n=0,1,\ldots, \tag{8}$$

tandis que l'évaluation des erreurs commises s'experime, respectivement, par

$$\|z-z_n\|\leqslant\gamma\|z-z_{n-1}\|\leqslant\ldots\leqslant\gamma^n\|z-z_0\|\leqslant\gamma^n\|r_0(x,t)\|:(1-\gamma) \tag{9}$$

et

$$|u(x,t)-u_n(x,t)|\leqslant(t-\alpha)\gamma^n\|r_0(x,t)\|:(1-\gamma),\ \forall\ (x,t)\in\mathfrak{D}, \tag{10}$$

où l'on a mis

$$r_0(x,t)\equiv z_0-A[z_0].$$

Remarque. 1°. On aboutit à l'ordre d'approximation désiré en choisissant pour la valeur du nombre ci-dessus

$$n\geqslant\ln[\varepsilon(1-\gamma):((\beta-\alpha)\|r_0(x,t)\|)]:\ln\gamma, \tag{11}$$

où ε est un nombre positif fixé d'avance.

2. ETUDE DE LA STABILITÉ DES SOLUTIONS DU PROBLÈME POSÉ.

Supposons que les conditions initiales (2) sont soumises aux perturbations intégrales que suivent

$$w(x,\alpha)=\zeta_0(x),\ w'_t(x,\alpha)=\zeta_1(x)+\int_\alpha^\beta P(x,\tau,w(x,\tau))\,d\tau, \tag{12}$$

où la nouvelle fonction inconnue cherchée est $w(x,t)$ et la fonction $P(x,\tau,s)$ est continue et lipschitzienne par rapport au paramètre s ayant pour coefficient de Liptschitz correspondant une fonction continue $L_p(x,\tau)$.

L'étude du problème (12) et

$$w''_{tt}(x,t)=$$

$$=f\left[(x,t)\,w(x,t), w'_t(x,t), \int_a^x M(x,t,\xi,u(\xi,t), u'_t(\xi,t))\,d\xi,\right.$$

$$\left.\int_a^t \mathcal{K}(x,t,\tau,\ u(x,\tau), u'_\tau(x,\tau))\,d\tau\right] \qquad (1\text{ bis})$$

se réduit, à la suite du changement de la fonction inconnue

$$w'_t(x,t)=h(x,t) \qquad (13)$$

et tout en tenant compte de

$$w(x,t)=\zeta_0(x)+\int_a^t h(x,\tau)\,d\tau, \qquad (14)$$

au problème de l'intégration de l'équation intégrale non linéaire

$$h(x,t)=\zeta_1(x)+\int_\alpha^\beta P\left[x,\theta,\zeta_0(x)+\int_a^x h(x,\tau)\,d\tau\right]d\theta+$$

$$+\int_\alpha^t f\left[x,\theta,\zeta_0(x)+\int_\alpha^\theta h(x,\tau)\,d\tau, h(x,\theta), \int_\alpha^x M(x,\theta,\xi,\zeta_0(\xi)+\right.$$

$$\left.+\int_\alpha^\theta h(\xi,\tau)\,d\tau\ , h(\xi,\theta))\,d\xi, \int_\alpha^\theta \mathcal{K}(x,\theta,\tau,\zeta_0(x)+\int_\alpha^\tau h(x,\tau)\,d\tau, h(x,\tau))d\tau\right]d\theta]. \qquad (15)$$

On en déduit le suivant

Théorème 3. *L'équation intégrale non linéaire* (15) *possède dans le domaine* $\mathfrak{D}$, *pour*

$$\gamma_1=\gamma+\left\|\int_\alpha^\beta L_P(x,\theta)\,(\theta-\alpha)\,d\theta\right\|<1, \qquad (16)$$

une solution unique et par suite le problème perturbé considéré a, dans les conditions ci-dessus, une solution continue unique ayant dans $\mathfrak{D}$ *les dérivées continues* $w_t^{(i)}$ $(i=1, 2)$

Les raisonnements ci-dessus conduisent aussi au suivant

Théorème 4. *La norme de la déviation* $\|u-w\|$ *entre les solutions des problèmes initial et perturbé est évaluée par l'inégalité*

$$\|u-w\|\leqslant\rho(\beta-\alpha). \qquad (17)$$

où l'on a mis

$$\| h-z \| \leqslant$$

$$\leqslant \| \int_{\alpha}^{\beta} P(x, \theta, \zeta_0(x) + \int_{\alpha}^{\theta} h(x, \tau)\, d\tau)\, d\theta \| : (1-\gamma) \equiv \rho, \ \forall\ (x, t) \in \mathfrak{D}. \qquad (18)$$

Remarque. 2°. On a conclut de (17) que la petitesse de la norme de la déviation entre la solution du problème perturbé et du problème initial est assurée dès que la norme de la perturbation intégrale en est elle aussi suffisamment petite dans $\mathfrak{D}$.

3. ETUDE DU PROBLÈME LINÉAIRE CORRESPONDANT

Dans le cas où la fonction $f[\cdot]$ est linéaire par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées partielles u'_t et u'_x, l'équation (1) s'écrit comme suit

$$u''_{tt}(x, t) = f(x, t) + f_1(x, t)\, u(x, t) + f_2(x, t)\, u'_t(x, t) +$$

$$+ \int_{\alpha}^{x_1} \sum_{0}^{1} M_i(x, t, \xi)\, u_t^{(i)}(\xi, t)\, d\xi + \int_{\alpha}^{t} \sum_{0}^{1} \mathfrak{K}_i(x, t, \tau)\, u_\tau^{(i)}(x, \tau)\, d\tau, \qquad (19)$$

où les fonctions connues $f(x, t)$, $f_i(x, t)$ $(i = 1, 2)$, $M_i(x, t, \xi)$ $(i = 0, 1)$ et $\mathfrak{K}_i(x, t, \tau)$ $(i=0, 1)$ qui y figurent sont supposées continues dans $\mathfrak{D}$. A la suite de la transformation (3), le problème (2), (19) admet lui aussi une solution continue unique ayant dans $\mathfrak{D}$ les dérivées continues, à savoir $u_t^{(i)}(x, t)(i=1, 2)$. Cette affirmation est basée sur le fait que l'équation intégrale linéaire équivalente au problème (2), (19)

$$z(x, t) = f_3(x, t) + \int_{\alpha}^{t} M_3(x, t, \tau)\, z(x, \tau)\, d\tau + \int_{\alpha}^{t} \int_{\alpha}^{x} M(x, t, \xi, \tau)\, z(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau \qquad (20)$$

possède toujours, dans les conditions ci-dessus, dans le domaine $\mathfrak{D}$ une solution continue unique.

Remarque. 3°. Dans quelques-unes de nos notes à paraître nous exposérons nombre de résultats concernant l'étude d'autres problèmes importants relatifs aux systèmes mathématiques possédant la structure complexe, tandis que notre série d'applications à la biomathématique [13] – [14] sera complétée par d'autres travaux.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. E. Krivochéine, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, Gh. Silaş, *Etudes des systèmes mathématiques possédant la structure complexe. I. Problème généralisé de valeurs initiales pour une nouvelle classe d équations intégro-différentielles non linéaires et aux dérivées partielles du premier ordre.* Bull. Soc. Sci. Liège (sous press).

2. E. Krivoshein, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli et Gh. Silaş, *Studi concenenti sistemi matematici di struttura composita.* II. *Problema di valori iniziali-integrali per un sistema misto di equazioni non lineari integro-differenziali a derivate parziali.* Rend. Accad. Sci. Torino (sous presse).
3. L. E. Krivochéine, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli et R. P. Voine, *Etudes des systèmes mathématiques possédant la structure complexe.* III. *Sur l'extension du problème de Goursat pour certains systèmes integrals-fonctionnels concernant une classe d'équations intégro-différentielles non linéaires aux opérateurs polyvibrants.* Bull. Acad roy. Sci. Belgique (sous presse).
4. J. M. Greenberg, *A Note of the Nagumo equation.* Quart. J. Math., 1973, 24, No 95, 307–314.
5. J. Brilla, *Variational methods in mathematical theory of visco-elasticity.* Proc. Equadiff. III. Czechosl. Conf. Different. Eq. and Applicat. Brno, 1972, J. E. Purkynè Univ., 1973, 211–226.
6. S. Vasilach, *Solutions of some parabolic integro-differential equations.* Publs. Inst. Math., 1973, 15, 153–169.
7. M. Picone, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equationi a derivate parziali della Fisica-Matematica.* Ann. Sci. Univ. Jassy, 26, Section I, 1940, 162–232.
8. * * *, *Mauro Picone.* Duodecim Doctorum Virorum Vitae at Operum Notitia. Pontificia Academia Scientiarum, A. D. MCMLXX, 118–147.
9. D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, *Mathematical systems of mixed structures. On the solutions of some linear and nonlinear functional-integrale and integro-differential-functional equations.* Doklady Akad. Nauk S.S.S.R., 196, 293–295 et 523–526 1971. Traduit en anglais dans „Soviet Math., Doklady", 12, 118–120 et 187–191, 1971.
10. D. Mangeron, L. E. Krivoshein, *Problemi concernenti vari equazioni integro-differenziali con derivate totali di Picone.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 33 (1963), 226–266; 34 (1964), 344–368; 35 (1965), 341–363.
11. M. N. Oguztoreli, D. Mangeron, *Sur certaines équations fonctionnelles-différentielles aux différences, à plusieurs variables indépendantes.* Proc. Japan Acad. Sci., 46, 1970, 524–528.
12. L. E. Krivochéine, K. V. Leung, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, *Systèmes mathématiques possédant la structure complexe. Existence, unicité stabilité et approximation des solutions de certains systèmes intégro-différentiels non linéaires aux opérateurs différentiels ordinaires et hyperboliques.* Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belgique, 1972, (5) 58, No 11, 1307–1315.
13. K. V. Leung, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, R. B. Stein, *On the stability and numerical solutions of two neural models.* Utilitas Math., 1973, 4.
14. K. V. Leung, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, R. B. Stein, *Analysis of neuronal models in the time and frequency domains.* (Sous presse).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ. VI. РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ ПРИ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

(РЕЗЮМЕ)

Авторы, продолжая ряд своих исследований посвященных дифференциальным задачам комплексной структуры [1]—[3], [9]—[12], резонирующихся в последние годы с одной из тем предложенных Бельгийской Академии Наук, исследуют корректность печальной задачи для некоторого класса нелинейных интегро-дифференциальных операторов с частными производными параболического типа. Даны теоремы существо-

вания, единственности и эффективного построения приближенных решений. Исследована затем устойчивость решений рассматриваемой системы по отношению к «пертурбациям» начальных условий и даны оценки соответствующих погрешностей. Отмечаются некоторые работы по прикладному анализу [4]—[6], посвященные недавно частным случаям разрабатываемых авторами дифференциальных задач, а так же и факт того, что в основе многих из них лежат гениальные труды акад. М. Пиконе [7]—[8].

PROBLEME COMPLEXE POSEDÎND STRUCTURA COMPLEXĂ. VI. CERCETAREA SOLUȚIILOR UNOR SISTEME INTEGRO-DIFERENȚIALE NELINIARE CU OPERATORI PARABOLICI SUPUSE LA CONDIȚII INIȚIALE

(REZUMAT)

Autorii, continuîndu-și seria de lucrări proprii consacrate studiilor sistemelor diferențiale posedînd structura complexă [1] – [3], [9] – [12], ce se încadrează într-una din temele propuse de către Academia de Științe din Belgia, expun un număr de teoreme privitoare la existență, unicitate și constucție efectivă a soluțiilor aproximative ale unor sisteme constituite dintr-o clasă de ecuații integro-diferențiale neliniare cu operatori parabolici cu soluții supuse la condiții inițiale. Se studiază de asemenea, stabilitatea soluțiilor sistemului considerat în raport cu perturbațiile cauzate de anume condiții inițiale, făcîndu-se și evaluarea erorilor comise. Se stabilește în fine o teoremă privind cazul liniar corespunzător.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

PERIODISCHE BEWEGUNGSREGIMES EINES STOSSSCHWINGERS IN DER VORAUSSETZUNG DASS INNENREIBUNG VORHANDEN IST

VON

GH. SILAŞ, L. BRINDEU, V. BACRIA

1. Das Vorhandensein der periodischen stossschwingenden Bewegungen mit einem Freiheitsgrad wurde in der Voraussetzung, dass die Reibung viskö-ser Natur ist, vollständig studiert.

In dieser Abhandlung über innere Reibung wurde die Hypothese des E. S. Sorokin [4] verwendet, welche die elastische Konstante durch eine komplexe elastische Konstante ersetzt.

Auf diese Art und Weise wurden die periodischen Bewegungsregimes des stossschwingenden Systems bestimmt, wobei auch die innere Reibung in betracht gezogen wurde.

2. Das Studium der periodischen Bewegungen efrolgt genau so wie beim Fehlen der inneren Reibung. Für den Stossschwinger, mit einem Freiheitsgrad verwendet man die komplexe Differentialgleichung mit der elastischen komplexen Konstante $k\ (1+i\,\gamma)$.

Diese Differentialgleichung wird wie folgt geschrieben :

$$m\ddot{z}+k\,(1+i\,\gamma)\,z=P_0\,e^{i\omega t} \tag{1}$$

wobei der von der Masse m zurückgelegte Weg in bezug auf statische Gleichgewichtslage $x=\mathrm{Re}\,z$ ist.

Die Anfangsbedingungen der Bewegung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stössen $(t_k,\ t_{k+1})$ sind :

$$z\,(t_k)=z_0 \qquad \dot{z}\,(t_k)=RV \tag{2}$$

Zu Beginn des Zusammenstosses der Ordnung $k+1$, als Ende des Intervalls betrachtet, folgt :

$$z\,(t_{k+1})=z_0 \qquad \dot{z}\,(t_{k+1})=-V \tag{3}$$

wobei V die komplexe Geschwindigkeit in Augenblick des Zusammenstosses und R der Abfallkoeffizient ist.

Das Gesetz der Bewegung, die Lösung der Gleichung (1) mit den Anfangsbedingungen (2), ist :

$$z=\frac{(1+R)\,V}{2\omega\,\lambda\,(1-e^{2\pi n\lambda})}\left\{e^{\lambda\omega(t-t_k)}+e^{\lambda[2\pi n-\omega(t-t_k)]}\right\}+\frac{f}{d^2}\left[(\xi^2-1)-i\,\xi^2\,\gamma\right]e^{i\omega t} \tag{4}$$

wo $\lambda=\xi\,(\alpha+i\,\beta)=\xi\sqrt{-(1+i\,\gamma)}$; $d=\sqrt{(\xi^2-1)^2+\xi^4\gamma^2}$; $\xi^2=\frac{k}{m\,\omega^2}$; $f=\frac{P_0}{m\,\omega^2}$

Aus den Grenzbedingungen (3) folgt noch :

$$e^{i\omega t_k}=\frac{V\,(1-R)\,[(\xi^2-1)\,i-\xi^2\,\gamma]}{2\,\omega\,f} \tag{5}$$

Aus dieser Beziehung erhält man :

$$v_1=\sqrt{\frac{4\,\omega^2 f^2}{(R-1)^2\,d^2}-v_0^2} \tag{6}$$

wobei $V=v_0+iv_1$.

Gleichfalls, indem man die Bezeichnungen :

$$E=\frac{\alpha\,\mathrm{sh}\,2\pi\,n\,\xi\,\alpha-\beta\sin 2\pi\,n\,\xi\,\beta}{\xi\,(\alpha^2+\beta^2)\,(\mathrm{ch}\,2\pi n\,\xi\,\alpha-\cos 2\pi\,n\,\xi\,\beta)}\;;\quad F=\frac{\beta\,\mathrm{sh}\,2\pi\,n\,\xi\,\alpha+\alpha\sin 2\pi\,n\,\xi\,\beta}{\xi\,(\alpha^2+\beta^2)\,(\mathrm{ch}\,2\pi\,n\,\xi\,\alpha-\cos 2\pi\,n\,\xi\,\beta)}$$

verwendet folgt noch :

$$2\,\omega\,x_0-v_0\,(R+1)\,E=v_1\,[(R+1)\,F+(R-1)] \tag{7}$$

Nachdem man statt v_1 die Werte aus Beziehung (6) in (7) einsetzt erhält man eine Gleichung zweiten Grades in v_0, die folgende Wurzel hat :

$$v_0=\frac{2\,\omega f}{(1-R)\,\eta}\,\frac{s\,\Phi\pm\sqrt{\frac{(1+\Phi^2)\,\eta^2}{d^2}-s^2}}{1+\Phi^2} \tag{8}$$

wo $$\Phi=\frac{1}{1-\frac{1-R}{1+R}\cdot\frac{1}{E}}\;;\quad -\frac{x_0}{f}=s\quad \eta=1-\frac{1+R}{1-R}\,F.$$

Mit den Formeln (8) bestimmt man die Regimes der periodischen Bewegung des Stossschwingers.

3. Damit die periodischen Bewegungsregimes existieren, muss das rechte Glied der Gleichung (8) reelle und aus (8) ist ersichtlich, dass man zwei periodische Bewegungsregimes verwiklichen kann entsprechend den zwei Vorzeichen der Quadratwurzel.

Damit die Geschwindigkeit reel sei, muss der Ausdruck unter der Wurzel pozitiv sein, ganz gleich welches Regime verwirklicht wird.

Im Falle des Regimes dem das Vorzeichen plus entspricht, behandelt man zwei mögliche Fälle $s\,\Phi \geqslant 0$ und $s\,\Phi \leqslant 0$.

Im Falle $s\,\Phi \geqslant 0$, ist die Bewegung möglich, wenn die Bedingung

$$|s| \leqslant |\eta| \frac{\sqrt{1+\Phi^2}}{d} \tag{9}$$

erfüllt ist.

Während, falls $s\,\Phi \leqslant 0$ ist, die Bewegung möglich ist, wenn:

$$|s| \leqslant |\eta| \frac{\sqrt{1+\Phi^2}}{d} \quad \text{und} \quad |s\Phi| \leqslant \frac{\sqrt{(1+\Phi^2)\,\eta^2 - d^2 s^2}}{d} \tag{10}$$

Auf ähnliche Weise behandelt man das Regime, dem das Vorzeichen minus entspricht.

Wenn $s\,\Phi \geqslant 0$ ist die Bewegung möglich, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$|s| \leqslant |\eta| \frac{\sqrt{1+\Phi^2}}{d} \quad \text{und} \quad s\Phi \geqslant \frac{\sqrt{(1+\Phi^2)\,\eta^2 - s^2 d^2}}{d} \tag{11}$$

Wenn $s\,\Phi \leqslant 0$ ist die Geschwindigkeit negativ und die Bewegung ist nicht möglich.

LITERATURVERZEICHNIS

1. L. Hamburger, Gh. Buzdugan, *Teoria vibraţiilor şi aplicaţiile ei în construcţia de maşini*. Ed. tehnică Bucureşti 1958.
2. Gh. Silaş, L. Brîndeu, *Regimurile periodice staţionare ale mecanismelor vibropercutante cu amortizare vîscoasă avînd un grad de libertate*. Bul. St. şi Tehnic al I.P.T. Seria nouă tom 11(25), fasc. 1/1966.
3. Gh. Silaş, L. Brîndeu, A. Hegedüs, *Studiul mişcărilor vibropercutante ale unei mase libere cu excitaţie periodică*. St. cerc. mec. apl. tom 29 nr. 5,1970.
4. E. S. Sorokin, *Die Methode der Berechnung des unelastischen Material-widerstandes bei der Berechung der Schwingungen von Konstruktionen, Dynamik von Bankonstruktionen*, Vel Verlag Technik Berlin, 1953.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

(РЕЗЮМЕ)

В работе рассматриваются периодические движения виброударной системы с одной степенью свободы. Учитывается внутреннее трение заменив упругую постоянную комплексной.

Периодические режимы движения рассматриваются в зависимости от параметров системы.

REGIMURI PERIODICE DE MIȘCARE ALE UNUI SISTEM VIBROPERCUTANT ÎN IPOTEZA EXISTENȚEI FRECĂRII INTERNE

(REZUMAT)

În lucrare se studiază mișcările periodice ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate. Se ia în considerare frecarea internă prin înlocuirea constantei elastice cu una complexă.

Regimurile periodice de mișcare se discută în funcție de parametrii sistemului.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

DIE VERWENDUNG DER OPERATORENRECHNUNG BEIM STUDIUM DER PERIODISCHEN BEWEGUNGEN DER STOSSSCHWINGER MIT EINEM FREIHEITSGRAD UND EINEM STOSSPAAR

von

L. BRÎNDEU

Die periodischen Bewegungen eines Stossschwingers mit einem Freiheitsgrad und einem Stosspaar welche durch eine harmonische Kraft erregt werden, wurden zum ersten Mal von U.G. Rusakov und A.A. Harkevici [1] und später von Barkan D.D. [2] bestimmt. Diese Ergebnisse wurden auch für den Fall, dass auf das System eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung einwirkt, erweitert [3]. Ein vollständiges allgemeines Studium der Bewegungen im Falle einer beliebigen periodischen Erregung wurde mit Hilfe von komplexen Zahlen durchgeführt [4].

In diesem Beitrag werden die periodischen Bewegungen des Stossschwingers mit einem Freiheitsgrad und einem Stosspaar mit der Operatorenrechnung bestimmt.

DER STOSSSCHWINGER

Der Stossschwinger (Abb. 1) besteht aus der Masse m die durch die Federn mit der elastischen Konstanten k befestigt ist und auf welche die der harmonischen Störkraft $Q(t)=mA\,\omega^2\cos\omega t$ einwirkt.

Die Lage der Masse m wird durch die Koordinate x bestimmt, welche aus der Lage mit unverformten Federn gemessen wird. Bezeichnet man mit x_0 die Entfernung bis zum festen Bezugsystem, so kann man die Zusammenstösse des Stosspaares analytisch, mit Hilfe der einseitigen Bindung

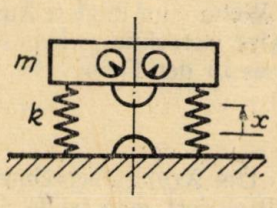


Abb. 1

$$f(x)=x+x_0\geqslant 0 \qquad (1)$$

untersuchen.

Die Differentialgleichung der Bewegung in den Abständen zwischen den Zussammenstössen ist

$$m\ddot{x}+kx=mA\,\omega^2\cos\omega t-mg \qquad (2)$$

Wenn im Augenblick $t=t_k$ ein Zusammenstoss stattfindet, dann ist $x(t_k)=-x_0$ und die Geschwindigkeiten vor und nach dem Zusammenstoss sind $\dot{x}(t_k-0)=\dot{x}_k$ beziehungsweise $\dot{x}(t_k+0)=\dot{x}_k'=-R\dot{x}_k$. Die periodischen Bewegungen des Systems mit der Periode $t_{k+1}-t_k=r\frac{2\pi}{\omega}$ $(r=1, 2, \ldots)$ können nur unter der Voraussetzung, dass die Geschwindigkeiten $\dot{x}$ beim Zusammenstoss alle gleich sind $\dot{x}_k=v$, $(k=1, 2, \ldots)$ auftreten.

Diese Bedingungen in die Lösung der Gleichung (2) einsetzt erlaubt es die Parameter der periodischen Bewegungen, der Zeitpunkt der ersten Zusammenstosses und v die Stossgeschwindigkeit zu bestimmen.

In Fortsetzung werden die periodischen Bewegungen des Stossschwingers durch eine neue Methode mit Hilfe der Operatorenrechnung bestimmt.

BESTIMMUNG DER TRANSFORMIERTEN DES BEWEGUNGSGESETZES

Die periodischen Bewegungen des Stossschwingers werden mit Hilfe der Laplace Transformation bestimmt. Man bezeichnet mit $X(p)$ die Transformierte des Bewegungsgesetzes $x(t)$ und mit $X_0(p)$ die Transformierte derselben Funktion für eine Periode rT, die zum Zeitpunkt $t=t_0$ $(t_0>0)$ beginnt. Aus der Definition der Laplace Transformation folgt:

$$X(p)=\int_{t_0}^{\infty} x(t)\,e^{-pt}\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t_0+krT}^{t_0+(k+1)rT} x(t)\,e^{-pt}\,dt. \tag{3}$$

Verwendet man die Substitution $t=krT+\tau$ $(k=1, 2, \ldots)$ in jedem der Integrale die in (4) addiert werden und berücksichtigt man die Periodizitätsbedingung $x(krT+\tau)=x(\tau)$, so kann man schreiben:

$$X(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+rT} x(krT+\tau)\,e^{-p(krT+\tau)}\,d\tau=\left(\sum_{k=0}^{\infty}e^{-kprT}\right)\int_{t_0}^{t_0+rT} x(\tau)\,e^{-p\tau}d\tau, \tag{4}$$

Wenn im letzten Ausdruck die Summe der geometrischen Folge im ersten Faktor berechnet wird, so erhält man die Transformierte des Bewegungsgesetzes in der Form

$$X(p)=\frac{X_0(p)}{1-e^{-prT}}. \tag{5}$$

Um $X(p)$ zu berechnen muss man also $X_0(p)$ bestimmen. Zu diesem Zweck multipliziert man beide Seiten der Differentialgleichung (2) der Bewegung mit e^{-pt} und integriert dann zwischen den Grenzwerten t_0 und t_1.

In erster Reihe wird das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1}\ddot{x}(t)\,e^{-pt}\,dt=\dot{x}(t_1-0)\,e^{-pt_1}-\dot{x}(t_0+0)\,e^{-pt_0}+p\,[x(t_1)\,e^{-pt_1}-x(t_0)\,e^{-pt_0}]+$$
$$+p^2X_0(p). \tag{6}$$

berechnet, welches, laut den Bedingungen im Augenblick des Zusammenstosses, folgende Form annimmt:

$$\int_{t_0}^{t_1} \ddot{x}\,(t)\,e^{-pt}\,dt=(R+e^{-prT})\,ve^{-pt_0}+p^2\,X_0\,(p) \tag{6'}$$

Desgleichen ist noch zu berechnen:

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{-pt}\cos\omega t\,dt=\frac{(p\cos\omega t_0-\omega\sin\omega t_0)\,(1-e^{-prT})\,e^{-pt_0}}{\omega^2+p^2} \tag{7}$$

So erhält man aus der Gleichung (2) mit Hilfe der berechneten Ausdrücke (6') und (7)

$$(mp^2+k)\,X_0\,(p)+mv\,(R+e^{-prT})\,e^{-pt_0}+mp\,X_0\,(1-e^{-prT})=$$

$$=m\,(1-e^{-prT})\,e^{-pt_0}\left(\frac{p\cos\omega t-\omega\sin\omega t_0}{\omega^2+p^2}-\frac{g}{p}\right)$$

Nachdem man aus dieser Beziehung $X_0\,(p)$ berechnet, folgt auf Grund der Formel (5)

$$X\,(p)=\frac{e^{-pt_0}}{p^2+\omega_n^2}\left[v-px_0+\omega^2A\,\frac{p\cos\omega t_0-\omega\sin\omega t_0}{\omega^2+p^2}-\frac{g}{p}-\frac{(1+R)\,v}{1-e^{-prT}}\right] \tag{8}$$

wo $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ ist. Der Ausdruck (8) stellt die Laplace Transformierte des periodischen Bewegungsgesetzes $x\,(t)$ mit der Periode rT dar.

DIE EXISTENZBEDINGUNGEN DER PERIODISCHEN BEWEGUNGEN

Die Bestimmung des Bewegungsgesetzes $x\,(t)$ erfolgt mit Hilfe der Transformierten $X\,(p)$ die aus Beziehung (8) bekannt ist. Um die Originalfunktion zu finden verwendet man die Inversionsformel Mellin-Fourier

$$x\,(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} X(p)\,e^{pt}\,dt \tag{9}$$

Die Integrierung erfolgt längs der Geraden $p=\sigma_0$ von welcher alle singulären Punkte der Funktion $X\,(p)$ [5] links liegen. Die Funktion (8) erfüllt das Jordansche Lema, das heisst, dass das Integral (9) längs des Halbkreises mit unendlichem Halbmesser in der linken Halbebene, Null ist. Die Integration kann also entlang der geschlossenen Kontur, die durch die Gerade $p=\sigma_0$ und den links von dieser Geraden befindlichen Halbkreis mit unendlichem Halbmesser bestimmt ist, erfolgen.

Auf diese Art und Weise kann man das Integral (9) mit dem Residuensatz berechnen. Damit die Bewegung periodisch ist, müssen die singulären Punkte von $X(p)$ nur einfache Pole sein

$$p_j = \frac{j\omega}{r} i, \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{10}$$

welche auf der imaginären Axe liegen.

Damit folglich periodische Bewegungen existieren, darf, falls Resonanz ausgeschlossen wird, $p=\pm i\omega_n$ kein Pol für die Beziehung (8) von $X(p)$ sein.

Dies ist aber nur möglich wenn die Bedingung

$$\lim_{p=\pm i\omega_n} (p^2+\omega_n^2) X(p)=0 \tag{11}$$

erfüllt ist.

Für $p=i\omega_n$ nimmt die Beziehung (11) folgende Form an:

$$v-i\omega_n A\left[s-\frac{\xi_n \cos \omega t-\sin \omega t_0}{\xi_n (!-\xi_n^2)}\right]-\frac{(1+R)v}{1-e^{-i2\pi r\xi_n}}=0 \tag{12}$$

wo $s=\frac{x_0}{A}-\frac{g}{A\omega_n^2}$ und $\xi_n=\frac{\omega_n}{\omega}$ sind.

Wird auch die Beziehung für $p=-i\omega_n$ in Betracht gezogen oder werden die reellen und imaginären Teile aus (12) anulliert, was das Gleiche ist, erhält man:

$$\sin \omega t_0=\frac{(1-R)v(1-\xi_n^2)}{2\omega A} \tag{13}$$

und

$$\cos \omega t_0=(1-\xi_n^2)\left[s-\frac{(1-R)\delta v}{2\omega A}\right] \tag{14}$$

wo

$$\delta=\frac{1+R}{1-R}\frac{\operatorname{ctg} \pi r\xi_n}{\xi_n}$$

Wird t_0 zwischen den Gleichungen (13) und (14) eliminiert so folgt für die Geschwindigkeit beim Zusammenstoss

$$v=\frac{2\omega A}{1-R}\frac{\delta s \pm \sqrt{\frac{1+\delta^2}{(1-\xi_n^2)^2}-s^2}}{1+\delta^2}. \tag{15}$$

Den gefundenen Ausdruck erhält man auch auf anderem Wege [3]. Damit periodische Bewegungen existieren muss der Ausdruck (15) der Geschwindigkeit v reell und negativ sein.

LITERATURVERZEICHNIS

1. U. G. Rusakov, A. A. Harkevici, *Vînujdennie kolebaniia sistemî udariaiuşceisia ob ograniciteli*. Jurnal Tehniceskoi Fiziki, t. XII. vîp 11–12, 1942.
2. D. D. Barkan, *Vibrometod v stroitelstve*. Gosstroizdat, Moskva, 1959.
3. Gh. Silaş, L. Brîndeu, *Regimurile periodice staţionare ale mecanismelor vibropercutante cu amortizare vîscoasă avînd un grad de libertate*. Bul. Şt. şi Tehnic al Inst. politehnic Timişoara (serie nouă), tom 11(25), fasc. 1, 1966.
4. Gh. Silaş, *O nouă metodă de studiu a sistemelor vibropercutante liniare cu un grad de libertate şi o cuplă percutantă*. Bul. Şt. şi Tehnic al Institutului politehnic Timişoara, Seria Mat. Fiz. Mec. teoretică şi aplicată, tom 16(30), fasc. 1, 1971.
5. M. I. Kontorovici, *Calculul operaţional şi fenomenele tranzitorii din circuitele electrice* (trad. din limba rusă). Editura Energetică de Stat, Bucureşti, 1956.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАЦИОНАЛЬНОГО РАСЧЕТА В ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ И УДАРНОЙ ПАРОЙ

(РЕЗЮМЕ)

Учитывается виброударная система с одной степенью свободы и ударной парой приводимая в действие гармонической ударной силой. При помощи нового метода основанного на использовании операционального расчета, определяются условия существования периодических движений, с периодом кратным периоду ударной силы.

FOLOSIREA CALCULULUI OPERAŢIONAL ÎN STUDIUL MIŞCĂRILOR PERIODICE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU UN GRAD DE LIBERTATE ŞI O CUPLĂ PERCUTANTĂ

(REZUMAT)

Se consideră sistemul vibropercutant cu un grad de libertate şi o cuplă percutantă acţionat de o forţă perturbatoare armonică. Printr-o metodă nouă bazată pe folosirea calculului operaţional, se determină condiţiile de existenţă ale mişcărilor periodice avînd perioada multiplă perioadei forţei perturbatoare.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

CONTRIBUTIONS TO THE ANALYSIS OF STEADY-STATES OF A VIBRATOR USED FOR PILE THRUSTING

BY

I. GROŞANU

In case of piles thrust into soil by vibration it is assumed that the earth exhibits an elastic and a viscous characteristic, so that calculations are simplified. Actually, the dynamic model of the thrusting operation should be much more sophisticated in order to show good agreement with true conditions. Thus dynamic models have been developed taking into account dry friction, mass of earth put into movement, elastical and plastical characteristics of the various kinds of soils. Stationary motions have been investigated commonly on the dynamic model mentioned by the aid of the vibration generator with one or more degrees of freedom [1], [2], [3] operating as a vibrator or a vibratory striker. In most of these cases no interaction of the electric motor with the vibratory system has been considered.

With systems where this interaction is allowed for [2], [3], [5] linear elastical and viscous earth characteristics are assumed.

In the paper, the interaction of the electric motor with the vibrator rigidly mounted to a vertical pile is investigated assuming an earth with elastical deformation characteristics; as to damping, a viscous component and an ellyptical dissipation loop connected in parallel are assumed, so that the damping factor is depending on the velocity of the vibrator eccenters [1], [4].

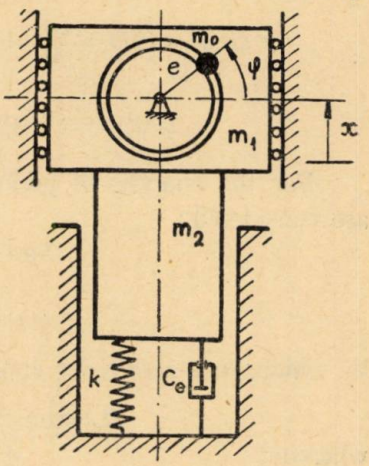


Fig. 1

For a better simplification the statical characteristic of the electric motor with linear dependence on the rotor angular speed which is rigidly attached to one of the eccenter axles with the mass m_0 and eccentricity e. The vibrator generator of inertial type with mass m_1 creates a force of disturbance directed along the vertical thrusting direction of a pile with mass m_2.

Periodical stationary motion of the system in Fig. 1 will be investigated with the equations of motion :

$$m\ddot{x}+c_e\dot{x}+kx=2m_0e\,(\dot{\varphi}^2\sin\varphi-\ddot{\varphi}\cos\varphi) \tag{1}$$

$$J\,\ddot{\varphi}=-2m_0e\,(\ddot{x}+g)\cos\varphi+M_0-M_1\,\dot{\varphi}$$

where x is pile displacement out of the position of equilibrium and

$$m=m_1+m_2+2m_0\,;\quad C_e=C_0+\frac{C_1}{\dot{\varphi}}\,, \tag{2}$$

C_0 and C_1 are constants.

Writing down

$$\omega_n^2=\frac{k}{m}\,;\quad \tau=\omega_n t\,;\quad y=\frac{x}{e}\,;\quad \mu=\frac{2m_0}{m}\,;\quad 2D=\frac{c_0}{m\,\omega_n}\,;\quad 2D_1=\frac{c_1}{\pi\,m\,\omega_n^2}\,;$$

$$\Omega=\frac{d\varphi}{d\tau}\,;\quad y'=\frac{dy}{d\varphi}\,;\quad \nu=\varepsilon\bar{\nu}=\frac{2\,m_0e^2}{J}\,;\quad \delta=\varepsilon\bar{\delta}=\frac{2\,m_0eg}{J\omega_n^2}\,; \tag{3}$$

$$\alpha_0=\varepsilon\,\bar{\alpha}_0=\frac{M_0}{J\omega_n^2}\,;\quad \alpha_1=\varepsilon\,\bar{\alpha}_1=\frac{M_1}{J\omega_n}$$

the system [1] becomes :

$$\Omega^2 y''+\left(2D+\frac{2D_1}{\Omega}+\Omega'\right)\Omega y'+y=\mu\,(\Omega^2\sin\varphi-\Omega\Omega'\cos\varphi)$$

$$\Omega\,\Omega'=-\varepsilon\,(\bar{\nu}\,\Omega^2 y''+\bar{\nu}\,\Omega\Omega'\,y'+\bar{\delta})\cos\varphi+\varepsilon\,\bar{\alpha}_0-\varepsilon\,\bar{\alpha}_1\,\Omega \tag{4}$$

For the analysis of periodical steady-states, the following developments are considered :

$$y=y_0+\varepsilon\,y_1+0\,(\varepsilon^2)$$

$$\Omega=\Omega_0+\varepsilon\,\Omega_1+0\,(\varepsilon^2) \tag{5}$$

by which, to a zero-order approximation it results :

$$\Omega_0=\text{const.},\qquad y_0=A\sin\varphi+B\cos\varphi \tag{6}$$

wherein :

$$A=\frac{\mu\Omega_0^2(1-\Omega_0^2)}{R_0}\,;\quad B=-\frac{2\mu\,\Omega_0^2(D\,\Omega_0+D_1)}{R_0}\,;$$

$$R_0=(1-\Omega_0^2)^2+4\,(D\,\Omega_0+D_1)^2 \tag{7}$$

To a first-order approximation of two of the equations of system [4], the result is:

$$\Omega_0\Omega_0' = (-\bar{\nu}\,\Omega_0^2\,A\,\sin\varphi - \bar{\nu}\,\Omega_0^2\,B\cos\varphi + \bar{\delta})\cos\varphi + \bar{\alpha}_0 - \bar{\alpha}_1\Omega_0$$

and therefore in order that the steady-state condition be periodical, it is necessary that in the right-hand member of equation [4] no constant terms should occur. This condition of periodicity conducts to the equation:

$$\frac{\mu\nu\Omega_0^4\,(D\,\Omega_0 + D_1)}{R_0} = \alpha_0 - \alpha_1\,\Omega_0 \tag{8}$$

the real and positive roots of which will determine the periodical steady-states.

To assess the roots of equation [8], a graphical procedure should be applied, the curve:

$$\Gamma\,(\Omega_0) = \frac{\mu\nu\Omega_0^4\,(D\,\Omega_0 - D_1)}{(1-\Omega_0^2)^2 + 4(D\Omega_0 + D_1)^2} \tag{9}$$

intersecting the straight line:

$$\Gamma_1\,(\Omega_0) = \alpha_0 - \alpha_1\Omega_0 \tag{10}$$

For $D=0{,}1$; $D_1=0{,}2$ and $\mu\nu = 0{,}5$ in Fig. 2, the curve Γ and three straight lines Γ_1 have been drawn. It is seen that at most three discrete positive roots $\Omega_{01} < \Omega_{02} < \Omega_{03}$ are possible, to which periodical steady-states correspond.

In particular, when $D = 0$, the curve $\Gamma_1\,(\Omega_0)$ becomes:

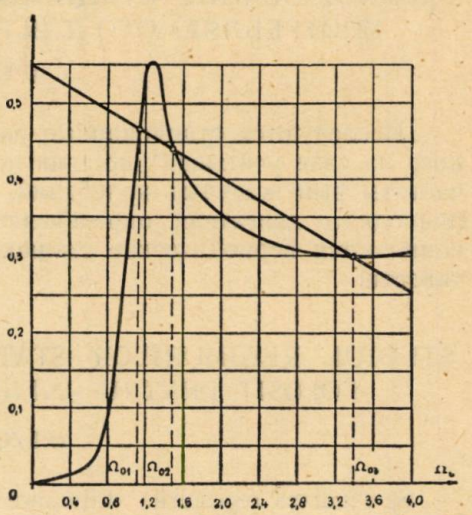


Fig. 2

$$\Gamma_0\,(\Omega_0) = \frac{\mu\nu D_1\Omega_0^4}{(1-\Omega_0^2)^2 + 4D_1^2} \tag{11}$$

Since $\Gamma_1\,(\Omega_0)$ is the torque transmitted by the electric motor to the mechanical system, its increase contributes to acceleration of the giratory movement, while $\Gamma\,(\omega_0)$ is the characteristic of the working machine. Taking into account the results of [2], in case of a a small positive disturbance of the velocity for the roots Ω_{01} and Ω_{03}, where:

$$\frac{d\Gamma(\Omega_0)}{d\Omega_0} > \frac{d\Gamma_1(\Omega_0)}{d\Omega_0} \tag{12}$$

the system becoming free, it returns to the steady-state condition existent before the disturbance took place; thus it may be stated that those steady states stable, while the steady-state corresponding to Ω_{02} is unstable.

BIBLIOGRAFIE

1. Ciunţ Z. G., *Grafo-analiticeskii metod rasceta rezonansnîh vibromaşin s ucetom vliianiia vnutrennîh izveşnîh soprotivlenii.* Vapr. Dinamiki i procinosti nr. 23, Izd. „Zinatne" Riga, 1972.
2. Groşanu I., *Contribuţii privind studiul mişcărilor staţionare şi nestaţionare ale sistemelor mecanice excitate inerţial, acţionate cu motoare electrice.* Rezumatul tezei de doctorat, Timişoara 1970.
3. Kononenko V. O., *Kolebatelinîe sistemî s ogranicennîm vozbujdeniem.*"Nauka" 1964.
4. Menges H. J. *Über die Dämpfung bei Gründungen* Z. A. M. M. Band. 15, Heft, Julie 1935.
5. Morrison J. A., *Asymptotic Analysis of a Nonlinear Autonomous Vibratory System.* The Bell System Technical Journal, January 1970.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ВИБРАТОРА УПОТРЕБЛЯЕМОГО ДЛЯ ПОГРУЖЕНИЯ СВАЙ В ГРУНТ

(РЕЗЮМЕ)

Исследуются стационарные режимы вибратора строго монтированного на свае учитывая рассеянные характеристики грунта как функция частоты вынужденных колебаний. Учитывая воздействие вибратора и приводного двигателя, определеяются угловые скорости для которых появляются периодические стационарные режимы и их области устойчивости.

STUDIUL REGIMURILOR STAŢIONARE ALE UNUI VIBRATOR FOLOSIT PENTRU INFIGEREA PILOŢILOR ÎN SOL

(REZUMAT)

Se studiază regimurile staţionare ale unui vibrator montat rigid pe pilot ţinînd seama de caracteristicile disipante ale solului presupuse funcţie de frecvenţa vibraţiilor forţate. Considerînd interacţiunea dintre vibrator şi motorul de acţionare, se determină vitezele unghiulare pentru care au loc regimuri staţionare periodice şi domeniile lor de stabilitate.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

DIE UNTERSUCHUNG DER PERIODISCHEN BEWEGUNGEN MIT PLASTISCHEM AUFPRALL EINES MASSENPUNKT DIE VON EINER SCHWINGENDEN PLATTFORM HERVORGERUFEN WERDEN, WOBEI DIE BERÜHRUNG PLÖTZLICH IST

VON

DOINA BECHERESCU

1. EINLEITUNG

Es wird ein mechanisches Modell in Betracht gezogen, das aus einem frei beweglichen Massenpunkt mit der Masse m und einer ebenen Plattform von der Masse M besteht, welche elastisch gelagert ist. Die Elastizitätskonstate der Federn ist k.

Ein Schwingungserreger, der auf die starr befestigt ist, erzeugt die Stör kraft $F(t)$. Letztere wird analytisch durch eine periodische Zeitfunktion be schrieben, deren Kreisfrequenz ω ist und deren Periode $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Somit erfü llt $F(t)$ die Periodiziätsbedingung

$$F(t+T)=F(t) \tag{1}$$

Während der Bewegung prallt der Massenpunkt mit der Masse m periodisch auf die Plattform. Der Aufprall zwischen Massenpunkt und die Plattformwird als ein plötzlicher angenommen wobei der Stosskoeffizient R $(0 \leqslant R \leqslant 1)$ ist.

In Zusammenhang mit diesem Modell, das beim Studium von Vibroförr derer, Vibroseparatoren auftritt, wurden mehrere Untersuchungen [1], [2-] durchgeführt, worin eine Reihe von Problemen geklärt wurden, die mit de-Funktionsweise dises Stoss-Schwing-Systems zusammenhängen.

Für das in Abb. 1 dargestellte System sollen die möglichen periodischen Bewegungen in der Voraussetzung bestimmt werden, dass der Aufprall zwischen Massenpunkt und Plattform plastisch ist $(R=0)$.

Im Falle eines Stosskoeffizienten gleich Null $(R=0)$, können die periodischen Bewegungen des Massenpunktes (Abb. 1) mit oder ohne andauernder Berührung auf der Plattform stattfinden.

Eine Untersuchung der periodischen Bewegungen des Stoss-Schwing-Systems aus Abb. 1, im Falle einer nichtplötzlichen Berührung wurde in [2] durchgeführt.

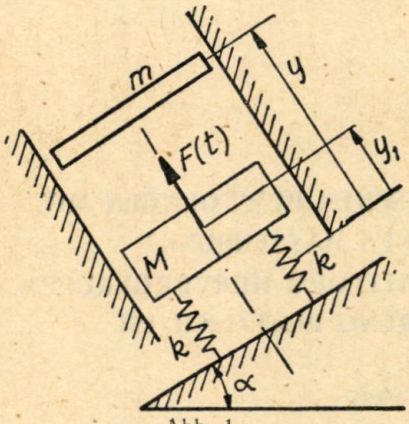


Abb. 1

In der vorliegenden Arbeit wird der Zweck verfolgt, die periodischen Bewegungen des Stoss-Schwing-Systems zu untersuchen, im Falle einer plötzlichen Berührung zwischen Massenpunkt und Plattform. Die Parameter der periodischen Bewegungen und die Stabilitätsbedingungen dieser Bewegungen können direkt aus den in [1] aufgestellten Beziehungen abgeleitet werden, wenn für R der Wert $R=0$ gesetzt wird.

Ausserdem muss jedoch auch die für plötzliche Berührung notwendige Bedingung geprüft werden. Zur Festlegung dieser Bedingung gemäss der in [4] beschriebenen Methode, muss die Funktion der einseitigen Bindung in Betracht gezogen werden.

Bezeichnet man mit y_1 und y die Koordinaten der Plattform und des Massenpunktes in nichtverformter Stellung der Stützfedern, dann gilt für das System die einseitige Bindung

$$\varphi(y, y_1)=y-y_1\geqslant 0 \tag{2}$$

Da $R=0$, werden die aus [4] bekannten Beziehungen zwischen den Geschwidigkeiten des Massenpunktes und der Plattform, $\dot{y}_0$ und $\dot{y}_{10}$, zu Beginn des Aufpralls und den Geschwindigkeiten $\dot{y}'_0$ und $\dot{y}'_{10}$ am Ende desselben Aufpralls zu:

$$\dot{y}''_0=\dot{y}'_0=\frac{\mu\dot{y}'_0+\dot{y}_{10}}{1+\mu}\qquad\left(\mu=\frac{m}{M}\right) \tag{3}$$

Auf Grund der Gleichung (3) gilt für alle möglichen Fälle die Beziehung:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_1=(\dot{y}-\dot{y}_1)_1=\dot{y}'_0-\dot{y}'_{10}=0. \tag{4}$$

Der Indiz 1 weist darauf hin, dass die Werte vom Endpunkt des Aufpralls in Betracht gezogen wurden.

Damit die Berührung zwischen Massenpunkt und Plattform plötzlich sei, wird nach der in [3] beschriebenen Methode angenommen:

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_1=(\ddot{y}-\ddot{y}_1)_1=\ddot{y}'_0-\ddot{y}'_{10}>0. \tag{5}$$

Aus den Differentialgleichungen der Plattform und des Massenpunktes im Intervall (t_k, t_{k+1}) zwischen den Stössen der Ordnung k und $k+1$:

$$\ddot{y}_1+\omega_n^2 y_1=f^*(t) \tag{6}$$

$$\ddot{y}=-g\cos\alpha \tag{7}$$

wobei

$$\omega_n^2=\frac{k}{M},\quad f(t)=\frac{F(t)}{M},\quad f^*(t)=-g\cos\alpha+f(t),$$

wird die Bedingung (5) wie folgt abgeleitet

$$\omega_n^2 y_0-f(t_k)>0. \tag{8}$$

2. BESTIMMUNG DER PARAMETER DER PERIODISCHEN BEWEGUNGEN

Die Parameter der periodischen Bewegungen werden aus den in [1] gegebenen Gleichungen abgeleitet, wobei $R=0$ genommen wird.

Die Geschwindigkeit der beiden Massen des Stoss-Schwing-Systems werden n diesem Fall folgende sein :

$$\dot{y}_0=-\frac{rTg\cos\alpha}{2} \tag{9}$$

$$\dot{y}_{10}=\frac{rTg\cos\alpha}{2}(1+2\mu) \tag{10}$$

Die Koordinate y_0 des Aufpralls und die Zeitpunkte t_k $(k=1, 2 \ldots n)$ der Stösse sind durch das System

$$y_0(1-\cos\omega_n rT)-\frac{rTg\cos\alpha}{2}\frac{\sin\omega_n rT}{\omega_n}=\frac{1}{\omega_n}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f^*(s)\sin\omega_n(t_{k+rT-s})\,ds \tag{11}$$

$$y_0\sin\omega_n rT-\frac{rT}{2}\frac{\cos\omega_n rT}{\omega_n}+\frac{rTg\cos\alpha(1+2\mu)}{2\omega_n}=\frac{1}{\omega_n}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f^*(s)\cos\omega_n(t_{k+rT-s})\,ds \tag{12}$$

gegeben.

Durch Ausscheidung von y_0 aus diesem System erhält man Gleichungen, welche die Zeitpunkte t_k der Stösse bestimmen :

$$rT(1+\mu)\sin\frac{\omega_n rT}{2}+\int_{t_k}^{t_{k+1}} f^*(s)\sin\omega_n\left(t_k+\frac{rT}{2}-s\right)ds=0. \tag{13}$$

3. STABILITÄTSUNTERSUCHUNG DER PERIODISCHEN BEWEGUNGEN.

Zur Stabilitätsuntersuchung der periodischen Bewegungen geht man in diesem Fall von der charakteristischen Gleichung vierten Grades in β aus, die in [1] aufgestellt wurde für $R=0$ eine wurzel $\beta=0$ und drei weitere Wurzeln besitzt, welche von der Gleichung

$$\beta^3+a_1\beta^2+a_2\beta+a_3=0 \tag{14}$$

gegeben werden, wobei

$$a_1=-\frac{[f(t_k)-\omega_n^2 y_0]}{g\cos\alpha}\cdot\frac{1}{(1+\mu)^2}\left(\mu\frac{\sin\delta}{\delta}+1\right)-\frac{2}{1+\mu}(\mu+\cos\delta),$$

$$a_2=\frac{2[f(t_k)-\omega_n^2 y_0]}{g\cos\alpha}\cdot\frac{1}{(1+\mu)^2}\left(\mu\frac{\sin\delta}{\delta}+\cos\delta\right)+\frac{1}{(1+\mu)^2}(2\mu\cos\delta+$$
$$+\mu\delta\cos\delta+\mu^2+1),$$

$$a_3=-\frac{[f(t_k)-\omega_n^2 y_0]}{g\cos\alpha}\cdot\frac{1}{(1+\mu)^2}\left(\mu\frac{\sin\delta}{\delta}+1\right). \qquad (\delta=\omega_n rT) \qquad (15)$$

In Anbetracht der Bedingung (8), welche die plötzliche Berührung und da $\mu<1$ $(m<M)$ folgt, dass:

$$a_3>0 \qquad (16)$$

Die Stabilitätsbedingungen der periodischen Bewegungen erhält man durch Anwendung des Kryteriums von Schur [3].

Diese Bedingungen werden durch die Koeffizienten (15) gemäss folgender Gleichungen ausgedrückt:

$$|a_3|<1,\quad\left|\frac{a_2-a_1a_3}{1-a_3^2}\right|<1,\quad\left|\frac{a_1-a_2a_3}{(1-a_3^2)-(a_2-a_1a_3)}\right|<1 \qquad (17)$$

Wie ersichtlich, bestimmt die erste Beziehung (17) zusammen mit (16) die Grenzwerte zwischen denen a_3 variiert, und zwar

$$0<a_3<1 \qquad (18)$$

Um die nachfolgenden Bedingungen (17) einfacher zu schreiben, werden die Koeffizienten a_1 uns a_2 durch a_3 ausgedrückt:

$$a_1=a_3-\frac{2(\cos\delta+\mu)}{1+\mu},$$

$$a_2=-2a_3\frac{\mu\sin\delta+\delta\cos\delta}{\mu\sin\delta+\delta}+\frac{1}{(1+\mu)^2}(2\mu\cos\delta+\mu\delta\sin\delta+1+\mu^2). \qquad (19)$$

Die zweite Bedingung (17) hat die Form:

$$\left|\frac{-2a_3\frac{\mu\sin\delta+\delta\cos\delta}{\mu\sin\delta+\delta}+\frac{1}{(1+\mu)^2}(2\mu\cos\delta+\mu\delta\sin\delta+1+\mu^2)-a_3^2+\frac{2a_3(\mu+\cos\delta}{1+\mu}}{1-a_3^2}\right|<1$$

und führt zu folgenden Ungleichungen:

$$a_3<\frac{(\mu\sin\delta+\delta)\left(2\sin\frac{\delta}{2}-\delta\cos\frac{\delta}{2}\right)}{2(1+\mu)(\delta-\sin\delta)\sin\frac{\delta}{2}}, \qquad (20)$$

$$2a_3^2 - \frac{2\mu(1-\cos\delta)(\delta-\sin\delta)}{(1+\mu)(\mu\sin\delta+\delta)}a_3 - \frac{1}{(1+\mu)^2}[2(1+\mu+\mu^2)+2\mu\cos\delta+\mu\delta\,\mathrm{sind}\,\delta]<0. \tag{21}$$

Die letzte der Bedingungen (17) kann geschrieben werden:

$$\left|\frac{a_3 - \frac{2(\cos\delta+\mu)}{1+\mu} + 2a_3^2\frac{\mu\sin\delta+\delta\cos\delta}{\mu\sin\delta+\delta} - a_3\frac{2\mu\cos\delta+\mu\delta\sin\delta+1+\mu^2}{(1+\mu)^2}}{1-a_3^2+\frac{2\mu\cos\delta+\mu\delta\sin\delta+1+\mu^2}{(1+\mu)^2} - a_3^2 + \frac{2\mu(1-\cos\delta)(\delta-\sin\delta)}{(1+\mu)(\mu\sin\delta+\delta)}a_3}\right| <1.$$

Daraus folgen die Ungleichungen:

$$2a_3^2\frac{2\mu\sin\delta+\delta(1+\cos\delta)}{\mu\sin\delta+\delta} + 2\frac{\mu\sin\frac{\delta}{2}}{(1+\mu)^2(\mu\sin\delta+\delta)}\left[2\left(1+2\mu\sin\delta\sin\frac{\delta}{2} - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\mu\delta\cos\frac{\delta}{2}\sin\delta\right) - \delta^2\cos\frac{\delta}{2} - 2\mu\sin\frac{\delta}{2}\right]a_3 - \frac{1}{(1+\mu)^2}[2(1+\cos\delta)(1+2\mu)+$$

$$+4\mu^2+\mu\delta\sin\delta]<0, \tag{22}$$

$$-4a_3^2\frac{\delta\sin\frac{\delta}{2}}{\mu\sin\delta+\delta} + \frac{2\mu\sin\frac{\delta}{2}}{(1+\mu)^2(\mu\sin\delta+\delta)}\left[-\sin\delta\left(2\sin\frac{\delta}{2}+\mu\delta\cos\frac{\delta}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\delta(2\mu+4)\sin\frac{\delta}{2} - \delta_1^2\sin\frac{\delta}{2}\right]a_3 + \frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{(1+\mu)^2}\left(2\sin\frac{\delta}{2}+\mu\delta\cos\frac{\delta}{2}\right)>0 \tag{23}$$

Aus den Stabilitätsbedingungen (20) – (23) erhält man durch Voraussetzen von Gleichungen anstelle der Ungleichungen, vier Gleichungskurven $a_3 = a_3(\xi)$, ($\xi=\delta/2\pi$) welche den Stabilitätsbereich abgrenzen. In den Abb. 2; 3 sind diese Kurven im Intervall $0<a_3<1$ für periodische Bewegungen mit $\mu=0{,}1$ und $\mu=0{,}2$ dargestellt.

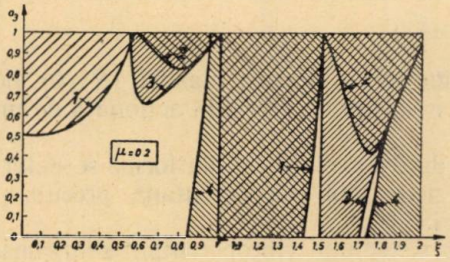


Abb. 2

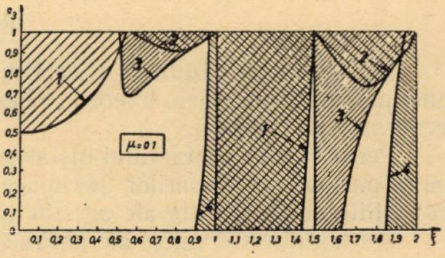


Abb. 3

Aus diesen Schaubildern können folgende Schlüsse gezogen werden:

– die Bereiche, in welchen es stabile periodische Bewegungen gibt, erleiden eine Schwingung bei Anwachsen des μ - Verhältnisses der Massen;

– stabile periodische Bewegungen treten in geringerem Mass für $\xi>1$ auf, als für $\xi<1$;

– die angegebenen Schaubilder gelten für jedwelche Form der Störkraft.

LITERATURVERZEICHNIS

1. D. Becherescu, *Asupra mişcării cu salturi ale unei particule pe o platformă vibrantă acţionată de un generator de vibraţii. I. Mişcare transversală.* Bul. Şt. şi Tehn. al I.P. Timişoara. Seria Mat. Fiz. Mec. teoretică şi aplicată tom 15(29), fasc. 2. 1970.
2. D. Becherescu, *Determinarea mişcărilor periodice cu ciocniri plastice $R=0$ şi contact neinstantaneu ale unei particule pe o platformă vibrantă.* Bul. Şt. şi Tehnic al I.P. Timişoara, Seria Mat. Fiz. Mec. teoretică şi aplicată. tom 21(35), fasc. 1, 1974.
3. A. E. Kobrinski, *Mehanizni s uprughimi sviaziami.* Izd. Nauka Moskva, 1964.
4. Gh. Silas, L. Brindeu, *Behandlung periodischer Bewegungen von Rüttelssystem mit Lagrangeschen Gleichungen.* V.D.I., Bericht, Nr. 135, Frühjahr, 1969.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ С ПЛАСТИЧНЫМИ СОУДАРЕНИЯМИ НЕКОТОРОЙ ЧАСТИЦЫ, ПРОИЗВЕДЕННЫЕ ВИБРИРУЮЩЕЙ ПЛОЩАДКОЙ ПРИ МГНОВЕННОМ КОНТАКТЕ

(РЕЗЮМЕ)

В работе исследуются периодические движения с пластичными соударениями ($R=0$) некоторой материальной свободной частицы произведенные вибрирующей площадкой приводимой в действие генератором вибраций.

Для случая мгновенного контакта между частицей и площадкой определяются параметры периодических движений виброударной системы, а также и условия устойчивости данных движений.

Для разных значений параметров виброударной системы были построены области в которых периодические движения устойчивы.

DETERMINAREA MIŞCĂRILOR PERIODICE CU CIOCNIRI PLASTICE ALE UNEI PARTICULE PRODUSE DE O PLATFORMĂ VIBRANTĂ CÎND CONTACTUL ESTE INSTANTANEU

(REZUMAT)

În lucrare se studiază mişcările periodice cu ciocniri plastice ($R=0$) ale unei particule materiale libere produse de o platformă vibrantă acţionată de un generator de vibraţii.

Pentru cazul contactului instantaneu dintre particulă şi platformă se determină parametrii mişcărilor periodice ale sistemului vibropercutant, precum şi condiţiile de stabilitate ale acestor mişcări.

Pentru diferite valori ale parametrilor sistemului vibropercutant s-au construit efectiv domeniile în care mişcările periodice sînt stabile.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
Tom. 19 (33), fasc. 2/1974

LA DÉTERMINATION DE LA BANDE DE STABILITÉ D'UN AGRÉGAT

PAR

I. GROŞANU, A. CHIRIAC

Dans le travail on considère le cas d'un agrégat dont la machine moteur est un moteur électrique asynchrone avec le rotor en court-circuit, couplé par une liaison rigide à la machine de travail qui est une machine rotative dont la force tehnologique a le moment réduit à l'axe de rotation une fonction périodique d'angle de rotation φ, avec la période 2π.

Pour l'étude des régimes de mouvement de ce agrégat, on considère que le moteur électrique fonctionne sur la caractéristique mécanique statique, exprimée aproximativement par [1], [2]

$$M_s(s) = \frac{2M_k}{\frac{s_k}{s} + \frac{s}{s_k}}. \tag{1}$$

En notant par J le moment d'inertie constant de toutes les pièces en mouvement de rotation, l'équation de mouvement de l'agrégat est

$$\frac{dE_c}{d\varphi} = 2M_k \frac{s_k\left(1-\sqrt{\frac{2E_c}{J\omega_0^2}}\right)}{s_k^2+\left(1-\sqrt{\frac{2E_c}{J\omega_0^2}}\right)^2} - M_L(\varphi), \tag{2}$$

où E_c c'est l'énergie cinétique donnée par

$$E_c = \frac{1}{2} J \omega_0^2 (1-s)^2, \tag{3}$$

et $s=1-\omega/\omega_0$ c'est le glissement et ω_0 – la vitesse angulaire de synchronisme du moteur électrique.

En notant le membre droit de l équation (2) par $M(\varphi, E_c)$ et par $\tilde{E}_c = J\ \omega_0^2/2$ la valeur maxime de l'énergie cinétique et si pour $|\varphi| < +\infty$, $0 \leqslant E_c < \tilde{E}_c$, sont accomplies les conditions $1°-3°$ exposées dans le travail [3], alors existe la courbe inertielle de l'agrégat, déterminée de l'équatiou

$$M(\varphi,\ \tau(\varphi)) \equiv 0. \tag{4}$$

Si on pose la condition que le moment $M(\varphi, \tilde{E}_c)$ soit une quantité strictement négative, il résulte que $M_L(\varphi)>0$, et de la condition $\frac{\partial M(\varphi, E_c)}{\partial E_c}<0$, résulte la condition $(1-s_k)^2\,\tilde{E}_c<E_c$ qui s'impose au glissement critique.

Pour la courbe inertielle, compte tenu de l'équation (2), on trouve :

$$\tau(\varphi)=\frac{J\omega_0^2}{2}\left[1-s_k\frac{M_k+\sqrt{M_k^2-M_L^2(\varphi)}}{M_L(\varphi)}\right]^2. \tag{5}$$

En notant

$$\left.\begin{aligned}\tau_*&=\inf\tau(\varphi),\\ \tau^*&=\sup\tau(\varphi),\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

pour $|\varphi|<+\infty$, on obtient la bande de stabilité [3], définie par les droites $E_c=\tau^*$ et $E_c=\tau_*$. La bande de stabilité dépend de la courbe inertielle et donc des paramètres de l'agrégat. Si le moment réduit de la machine de travail est une fonction périodique d'angle φ, avec la période 2π, alors chaque solution de l'équation de mouvement (2), pour une certaine valeur φ_1 de l'angle φ, entre dans la bande de stabilité et satisfait la condition

$$\tau_*\leqslant E_c\leqslant\tau^*, \tag{7}$$

pour $\varphi_1\leqslant\varphi<+\infty$ et donc le régime stationnaire qui accomplit ces conditions est asymptotique stable. (fig. 1).

Pour l'illustration de la méthode ont été considérées les expressions suivantes du moment réduit de la machine de travail: $M_{L1}=a^2(\alpha+\sin\varphi)$, $M_{L2}=a^2(\alpha+\sin^2\varphi)$, $M_{L3}=a^2(\alpha+\sin 2\varphi)$. Pour ces cas ont été déterminées et représentées dans les figures 2–4 des familles de courbes inertielles pour des valeur de $\alpha\in[1,\ 1\ ;\ 6]$, $s_k\in[0{,}06\ ;\ 0{,}24]$, $\tilde{E}_c=1$, $M_k=20$ Nm.

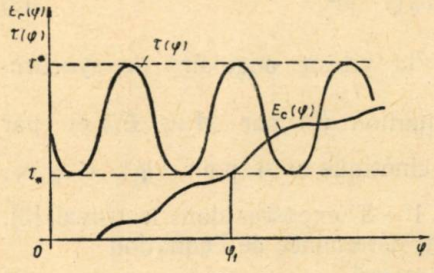


Fig. 1.

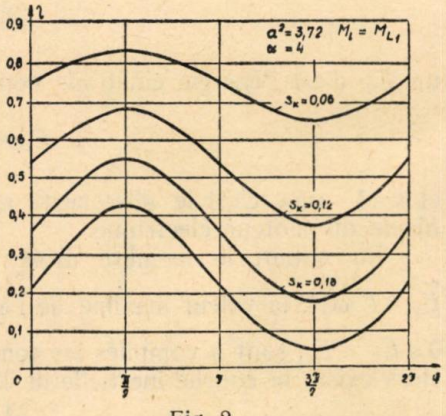


Fig. 2.

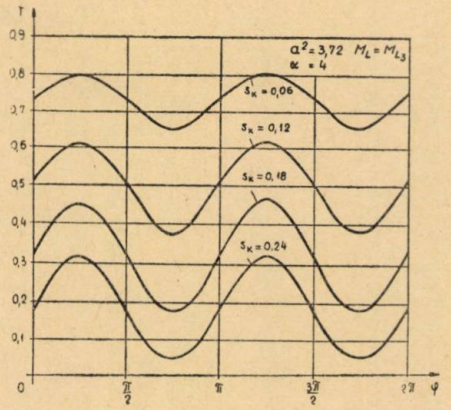


Fig. 4.

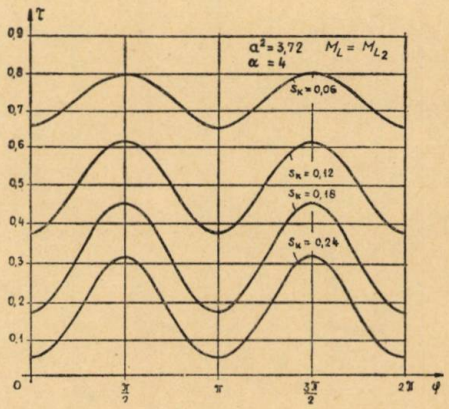


Fig. 5.

BIBLIOGRAPHIE

1. Boţan N. V., *Bazele calculului acţionărilor electrice.* Edituea Tehnică, Bucureşti, 1970.
2. Braşovan M., Seracin E., *Metode noi de proiectare a acţionărilor electrice.* Editura Academiei, Bucureşti, 1968.
3. Loščinin V. S., *Ob ocenkah uglovoj skorosti dviženija zvena privedenija mašinnogo agregata. Dinamika mašin, Teorija mašin i mehanizmov, Sbornik statej,* Izdatel'stvo „Mašinostroenie", Moskva, 1969, p. 226–235.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ АГРЕГАТА

(РЕЗЮМЕ)

В работе устанавливается уравнение инерциальной кривой машинного агрегата которой состоит из одного асинхронного электродвигателя с короткозамкнутым ротором, строго связанным с ротационной рабочей машиной.

На основе инерциальной кривой определяется лолоса устойчивости движения агрегата и даются примеры инерциальных кривых.

DETERMINAREA BENZII DE STABILITATE A UNUI AGREGAT

(REZUMAT)

În lucrare se stabileşte ecuaţia curbei inerţiale a unui agregat de maşini format dintr-un motor electric asincron cu rotorul în scurtcircuit, cuplat rigid cu o maşină de lucru rotativă. Pe baza curbei inerţiale, se stabileşte banda de stabilitate a mişcării agregatului şi se dau exemple de curbe inerţiale.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

I.P.B.T. — 1507/1975.

60

f 7414 S

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC AL INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" TIMIȘOARA

SERIA

MATEMATICA – FIZICA – MECANICA TEORETICĂ ȘI APLICATĂ

Tomul 19(33) Fascicola 2

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITATEA „POLITEHNICA" TIMIȘOARA 1848

IULIE–DECEMBRIE

1974